Heru Nugroho dkk.
MATEMATIKA
SMP DAN MTS KELAS VIII

MATEMATIKA

SMP DAN MTS KELAS VIII

Heru Nugroho
Lisda Meisaroh

2

PUSAT PERBUKUAN
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL

MATEMATIKA

SMP dan MTs Kelas VIII

Heru Nugroho • Lisda Meisaroh

2

Matematika

untuk SMP Kelas VIII

Penyusun : Heru Nugroho
Lisda Meisaroh
Editor : Dian Novianti
Tata Letak : Abbas Assafah
Pewajah Sampul : Sukmana
Ilustrator : Sukmana, Abbas As
Ukuran : 17,6 cm x 25 cm

510.07
HER
m

HERU Nugroho
Matematika 2 : SMP dan MTs Kelas VIII / penyusun, Heru Nugroho, Lisda Meisaroh ; editor Dian Novianti ; illustrator Sukmana, Abbas As
. -- Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2009.
vii, 230 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Bibliografi : hlm. 226
Indeks
ISBN 978-979-068-665-6

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Lisda Meisaroh III. Dian Novianti IV. Sukmana V. Abbas As

Diterbitkan Oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2009

Diperbanyak Oleh...

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2009, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 81 Tahun 2008 tanggal 11 Desember 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*download*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2009
Kepala Pusat Perbukuan

Kata Pengantar

Puji dan syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas limpahan rahmat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan buku matematika SMP Kelas VII – IX. Buku ini kami susun berdasarkan Standar Isi yang berlaku pada saat ini.

Seiring kemajuan di bidang teknologi dan informasi maka perkembangan ilmu pengetahuan pun semakin pesat. Siswa kini dapat belajar langsung dengan berbagai media, termasuk melalui komputer yang dapat mengakses internet. Namun demikian, kehadiran buku pelajaran tetap sangat dibutuhkan sebagai salah satu media guna menggali ilmu pengetahuan sebagai bekal dalam kehidupan di masa yang akan datang.

Banyak siswa beranggapan bahwa bahwa matematika merupakan pelajaran yang sulit. Padahal, ilmu ini sesungguhnya sangat menarik, apalagi jika dikaitkan dengan hal-hal nyata yang berkaitan dengan kehidupan sehari-hari. Hal ini tentu merupakan bahan renungan bagi penulis untuk membuat buku yang mudah dipahami oleh siswa sekaligus sangat menarik.

Penyajian buku ini menggunakan pendekatan CTL (*Contextual Teaching and Learning*). Dalam buku ini kami mencoba menyajikan matematika tidak hanya secara teoritis saja melainkan dengan berbagai penerapannya dalam kehidupan, kegiatan yang melatih kemampuan siswa, serta permainan matematika yang menguji pemahaman siswa terhadap konsep yang diajarkan. Selain itu, guru juga dapat ikut berperan aktif dalam proses pembelajaran dengan menyampaikan matematika melalui pendekatan yang paling dekat dengan keseharian siswa. Harapan kami mudah-mudahan buku ini dapat menjadi teman belajar dalam menggali ilmu di bidang matematika.

Kami menyadari menyusun sebuah buku yang baik dan sempurna amatlah sulit. Tiada gading yang tak retak, begitu kata pepatah. Oleh karena itu, penulis membuka diri untuk menerima kritik dan saran dari para praktisi demi penyempurnaan buku ini pada edisi selanjutnya.

Amin!

Bandung, Desember 2008

Penulis

DAFTAR ISI

Pendahuluan

Matematika merupakan salah satu mata pelajaran yang kamu pelajari di SMP dan MTs. Mata pelajaran ini secara sinergi dengan mata pelajaran lain dapat membentuk peserta didik agar sanggup menghadapi perubahan di dalam kehidupan melalui latihan bertindak secara sistematis, rasional, logis, dan kritis dalam mengkomunikasikan gagasan dan dalam pemecahan masalah. Selain itu, agar peserta didik dapat menggunakan matematika dengan menekankan pada aspek kemampuan dan kecakapan dalam berhitung.

Tujuan penyusunan buku matematika kelas VIII ini di antaranya adalah agar para siswa mahir menentukan faktorisasi, memahami pengertian fungsi, menentukan persamaan garis, mengenal garis singgung lingkaran, dan menghitung luas dan volume suatu bangun ruang.

Agar lebih mudah mempelajari, maka buku ini disusun dengan sistematika sebagai berikut:

a. ***Pendahuluan***, berisi pengantar dengan tema yang paling dekat dengan keseharian siswa. Bagian ini dilengkapi dengan tujuan pembelajaran guna mengarahkan siswa dalam menggali materi pelajaran.

b. ***Isi materi***, dirumuskan sesuai dengan Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar yang berlaku saat ini. Buku ini disajikan dengan pendekatan *Contextual Learning and Teaching* atau CTL. Dengan cara ini, diharapkan siswa dapat memahami peran matematika dalam kehidupan sehari-hari, sehingga matematika merupakan pelajaran yang menarik dan tidak perlu ditakuti.

Pada pelajaran semester 1 kamu akan mempelajari faktorisasi suku aljabar, fungsi relasi dan pemetaan, persamaan linear dua variabel (PLDV), serta menggunakan dalil Pythagoras. Sedangkan pada semester 2 pemahamanmu akan ditingkatkan dengan mempelajari: unsur-unsur lingkaran seperti busur lingkaran, sudut pusat, tembereng, dan garis singgung lingkaran; menghitung luas dan volume berbagai bangun ruang seperti kubus, balok, prisma, dan limas.

Pada setiap materi dilengkapi dengan contoh-contoh soal, latihan-latihan, tugas, math info, dan sekilas tokoh. *Contoh soal,* merupakan langkah yang harus diikuti dalam mengerjakan soal. *Latihan*, merupakan tolok ukur untuk mengetahui kemampuan siswa dalam memahami isi materi pelajaran. *Tugas*, bertujuan untuk mengembangkan pengetahuan, ketrampilan serta sikap. *Math Info,* disajikan berupa informasi seputar matematika guna membangkitkan motivasi dan menambah wawasan siswa. *Sekilas tokoh,* merupakan cuplikan sejarawan matematika secara singkat.

c. ***Penutup***, berisi soal otak-atik matematika, rangkuman, dan evaluasi. *Otak atik matematika*, berisi permainan matematika atau soal-soal tidak rutin untuk melatih pemahaman siswa terhadap konsep yang sudah diajarkan. *Rangkuman* berisi intisari materi pelajaran yang perlu diketahui. *Evaluasi*, disajikan pada akhir pelajaran untuk mengetahui pemahaman siswa tentang materi pelajaran. Evaluasi semester, diberikan pada akhir pelajaran semester 1 dan 2.

Agar lebih mudah mempelajari buku ini, belajarlah dengan cara-cara yang baik. Ikuti langkah-langkah berikut.

1. Baca dan pahami isi materi pelajaran.
2. Pelajari langkah penyelesaian pada setiap contoh soal. Ikuti petunjuk yang dianjurkan gurumu. Biasakanlah untuk cermat dan teliti dalam mengerjakan soal-soal latihan.
3. Kerjakan tugas-tugas sebagai latihan untuk memahami materi tersebut dengan penuh percaya diri. Biasakanlah berdiskusi atau bertanya jika terdapat hal-hal yang kurang dipahami.
4. Kerjakan soal-soal latihan untuk memperdalam pemahaman materi tersebut. Gunakan lembar latihan lain untuk mengerjakannya, agar bukumu tetap bersih dan dapat dipakai lebih lama.
5. Baca kembali setiap materi pelajaran yang sudah kamu pelajari. Kerjakan evaluasi pada akhir bab dan evaluasi semester. Jawablah pada lembar jawaban dan bukan dengan mencoret atau mewarnai buku ini. Jangan sekali-kali melihat kunci jawaban sebelum kamu mengetahui cara mengerjakannya.
6. Biasakanlah bersikap jujur dalam mengerjakan setiap latihan. Ingat kemajuan belajarmu ditentukan oleh usahamu.

Kamu tentu akan cepat memahami pelajaran jika selalu rajin berlatih. Tekun dan aktif berlatihlah. Renungkan dan ingatlah kembali pelajaran yang sudah kamu pelajari pada setiap akhir pelajaran.

Bab 1

Faktorisasi Suku Aljabar

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini siswa diharapkan mampu:

- Menjelaskan pengertian koefisien, variabel, konstanta, suku satu, suku dua, dan suku banyak;
- Menyelesaikan masalah operasi tambah, kurang, dan kali suku satu, suku dua, dan suku banyak;
- Menyelesaikan pembagian bentuk suku;
- Memfaktorkan suku bentuk aljabar sampai dengan suku tiga;
- Menyederhanakan pembagian bentuk suku;
- Mengenali makna dan solusi perpangkatan konstanta, suku, dan sebaliknya memfaktorkan kembali;
- Menyelesaikan operasi tambah, kurang, kali, bagi, dan pangkat pecahan bentuk aljabar dengan penyebut satu suku atau suku yang sama.

Pernahkah kalian berbelanja di supermarket atau mall? Saat berbelanja ada beberapa komponen yang terlibat dalam perhitungan, misalnya jumlah barang, harga barang, harga yang harus dibayar, dan uang kembalian. Misalnya Rina membeli 2 buah baju dan 3 buah rok. Selisih harga baju dan rok adalah Rp 40.000. Jika jumlah harga seluruhnya Rp 330.000,00, tentukan harga satu baju dan satu rok?

Cara di atas dapat diselesaikan dengan memisalkan baju sebagai x dan rok sebagai y. Maka jumlah harga seluruhnya ditentukan sebagai $2x + 3y = 330.000$, dengan $x - y = 40.000$ atau $x = 40.000 + y$. Dapatkah kamu menyelesaikan perhitungan ini?

Peta konsep

Faktorisasi suku aljabar
A. Faktorisasi suku aljabar
B. Menyelesaikan operasi hitung suku aljabar
1. Operasi hitung penjumlahan dan pengurangan
2. Operasi hitung perkalian dan pembagian
C. Pemfaktoran suku aljabar
1. Hukum distributif dan faktor persekutuan aljabar
2. Faktorisasi bentuk $x^2 + 2xy + y^2$
D. Pecahan dalam bentuk aljabar
1. Penjumlahan dan pengurangan pecahan bentuk aljabar
2. Perkalian bentuk aljabar
3. Pembagian bentuk aljabar
4. Menyederhanakan pecahan bentuk aljabar
E. Penerapan sifat operasi aljabar dalam aritmetika

A Faktorisasi Suku Aljabar

Kalian tentu sudah mengenal pengertian istilah aljabar. Pada pelajaran ini kita akan mengulas kembali pengertian aljabar dan unsur-unsur penyusunnya.

Pengertian aljabar secara bahasa adalah mempersatukan bagian-bagian yang terpisah. Bagian yang harus dipersatukan tersebut tentu saja unsur-unsur yang menyusun suatu bilangan aljabar. Dalam aljabar terdapat beberapa unsur penyusunnya seperti suku, faktor, suku sejenis, suku tidak sejenis, variabel, koefisien, dan tentu saja konstanta. Masih ingatkah kalian dengan bentuk-bentuk tersebut?

Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Perhatikan bentuk aljabar berikut!

1. $2a$
2. $3ax + 5by$
3. $4x^2 + 7ax - 6y^2 + 9$
4. $3ay$
5. $c^2 - 2ab$
6. $5a^2b^2 - 4a^2b + 32$

Bagi kalian yang pernah mempelajari aljabar, kalian pasti tidak akan kesulitan menentukan variabel, koefisien, konstanta, dan suku-suku aljabar. Angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7 disebut sebagai koefisien. Angka 9 dan 32 disebut konstanta. Sedangkan huruf a, b, c, x, dan y disebut peubah atau variabel.

Perhatikan kembali contoh di atas! Dari contoh tersebut kita mengetahui bahwa setiap bentuk aljabar mempunyai banyak suku yang berbeda-beda. Contoh (1) dan (4) disebut suku tunggal karena hanya mempunyai satu suku. Contoh (2) dan (5) disebut binom karena mempunyai suku dua, sedangkan contoh (3) dan (6) disebut polinom karena mempunyai banyak suku.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa yang dimaksud dengan suku banyak adalah bentuk aljabar yang mempunyai suku lebih dari suku dua atau mempunyai suku yang peubahnya berpangkat lebih dari dua.

Coba kalian sebutkan beberapa contoh suku tunggal, suku binom, dan polinom yang lain.

Latihan Soal

Tentukan koefisien, variabel, konstanta, dan jenis suku pada bentuk aljabar berikut ini!

a. $3p$
b. $-24x + 8y$
c. $3a^2 - 5b^2 + 25$
d. $x^2y^2 - 2xy + 3x^2y^2 + 12$
e. $abc + 2xyz - 2abc - (-3xyz) + a^2b^2c^2$
f. $5x + 14$
g. $7x + y - 2x - y$
h. $2x^2y^2 + 3x^2y^2 + 12$
i. $11c^3 + 12d^2 + 12 - 2c^3$
j. $16abcde$

B Menyelesaikan Operasi Hitung Suku Aljabar

Pada dasarnya operasi hitung pada suku aljabar tidak berbeda dengan operasi hitung pada bilangan bulat. Coba kalian perhatikan contoh-contoh di bawah ini, kemudian kalian ambil kesimpulan sendiri apakah terdapat perbedaan antara operasi hitung suku aljabar dengan operasi hitung bilangan bulat. Pada subbab ini kita akan sedikit mengulas tentang bentuk-bentuk operasi hitung pada bentuk aljabar.

1 Operasi Hitung Penjumlahan dan Pengurangan

Operasi hitung penjumlahan dan pengurangan suku aljabar dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan koefisien antara suku-suku yang sejenis. Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan bentuk aljabar berikut ini!

a. $4x + y - 2x$

b. $3a^2b - 5ab - 2a^2b$

Penyelesaian:

a. $4x + y - 2x = 4x - 2x + y = 2x + y$

b. $3a^2b - 5ab - 2a^2b = 3a^2b - a^2b - 5ab = a^2b - 5ab$

Selain dengan cara di atas, penjumlahan dan pengurangan pada suku satu, suku dua, atau suku banyak dapat dihitung dengan cara bersusun ke bawah. Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan bentuk aljabar berikut ini!

a. $4x + 2x$ b. $3a^2b + 2ab^2 - 2a^2b + 5ab^2$

c. $8x - 3x$ d. $7ab^2 - 3ab - 2ab^2 - 8ab$

Penyelesaian:

a. $$\begin{array}{r} 4x \\ 2x \\ \hline 6x \end{array} +$$

b. $$\begin{array}{r} 3a^2b + 2ab^2 \\ -2a^2b + 5ab^2 \\ \hline a^2b + 7ab^2 \end{array} +$$

c. $$\begin{array}{r} 8x \\ 3x \\ \hline 5x \end{array} -$$

d. $$\begin{array}{r} 7ab^2 - 3ab \\ 2ab^2 + 8ab \\ \hline 5ab^2 - 11ab \end{array} -$$

Ingat!!!!

Pengurangan suku sejenis merupakan penjumlahan suku-suku tersebut dengan lawannya.

Latihan Soal

Selesaikan operasi hitung penjumlahan dan pengurangan berikut ini!

1. $5x + 2y - 19x + 10y$
2. $-5x + z - 4y + 4x + 2z - y$
3. $-2x + 5y - 7z + -2x - 3y - 3z$
4. $x^2y - 2y^2 - 5xyz + 2x^2y - y^2$
5. $5ab + 2ac - 7c + 2ab - 4ac + 3c$
6. $4ab + 7b - b^2 - ab - 4b + 3b^2$
7. $-3abc + 8xy + 6abc - 7xy$
8. $-4a^2b^2 + 2xy - 6a^2b^2 + 9xy$
9. Arman mempunyai 5 buah robot dan 8 buah mobil-mobilan. Jika Arman diberi 2 buah robot oleh ibu dan 3 mobil-mobilannya ia berikan kepada Arif, berapa sisa robot dan mobil Arman!
10. Bu Winda membeli 4 kg telur, 3 kg wortel dan 6 kg tomat. Karena terlalu lama disimpan $\frac{1}{4}$ kg telur, 1 kg wortel dan 2 kg tomat ternyata busuk. Tentukan telur, wortel, dan tomat yang tersisa!

2 Operasi Hitung Perkalian dan Pembagian

Pada bentuk-bentuk aljabar berlaku sifat-sifat penjumlahan dan perkalian seperti pada bilangan bulat. Beberapa sifat tersebut antara lain:

a. Sifat komutatif penjumlahan, yaitu $a + b = b + a$

b. Sifat asosiatif penjumlahan, yaitu $a + (b + c) = (a + b) + c$

c. Sifat komutatif perkalian, yaitu $a \times b = b \times a$

d. Sifat asosiatif perkalian, yaitu $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

e. Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, yaitu:

$a \times (b \pm c) = (a \times b) \pm (a \times c)$

Pada perkalian antarsuku aljabar, kita dapat menggunakan sifat distributif sebagai konsep dasarnya. Pada bahasan ini akan dipelajari mengenai perkalian suku satu dengan suku dua atau dengan suku banyak dan perkalian antara suku dua dengan suku dua.

a. Perkalian Suku Satu dengan Suku Dua atau Suku Banyak

Berikut ini disajikan beberapa contoh perkalian suku satu, baik perkalian dengan suku dua atau dengan suku banyak.

Contoh

Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan bentuk aljabar berikut ini!

a. $4x\ (x - 2y)$ b. $8a\ (3ab - 2ab^2 - 8ab)$

Penyelesaian:

Gunakan sifat distributif untuk menyelesaikan permasalahan di atas.

a. $4x\ (x - 2y) = (4x \cdot x) - (4x\ (2y))$
$= 4x^2 - 8xy$

b. $8a\ (3ab - 2ab^2 - 8ab) = 8a\ ((3ab - 8ab) - 2ab^2)$
$= 8a\ ((-5ab) - 2ab^2)$
$= (8a \times (-5ab)) - (8a \cdot 2ab^2)$
$= -40a^2b - 16a^2b^2$ (bagi dengan –8)
$= 5a^2b + 2a^2b^2$

b. Perkalian Suku Dua dengan Suku Dua

Masih sama dengan perkalian sebelumnya, penyelesaian perkalian suku dua atau binomial tetap menggunakan konsep dasar sifat distributif. Misalkan kita mempunyai suku dua (binomial) yang berbentuk $(a + b)$ dan $(c + d)$. Langkah-langkah penyelesaian yang harus dilakukan adalah seperti terlihat pada gambar berikut.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Jadi $(a + b)(c + d) = (ac + bc) + (ad + bd)$

Perkalian suku dua dengan suku dua merupakan bentuk perkalian antara suku dua dengan dirinya sendiri atau dapat pula diartikan sebagai pengkuadratan suku dua. Misalkan kita mempunyai suku dua $(x+y)$, maka langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut.

$(x+y)^2 = (x + y)(x + y)$ (pengkuadratan)

$= x(x + y) + y(x + y)$ (sifat distributif)

$= ((x.x) + (x.y)) + ((y.x) + (y.y))$ (sifat distributif)

$= x^2 + xy + yx + y^2$ (sifat komutatif)

$= x^2 + 2xy + y^2$

Coba kalian tentukan langkah-langkah penyelesaian untuk perkalian suku dua yang berbentuk $(x\text{-}y)^2$!

Contoh

Tentukan hasil kali dari $(x + 2)^2$, kemudian sederhanakan!

Penyelesaian:

$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$

$= x^2 + 2x + 2x + 2 \times 2$

$= x^2 + 2(2x) + 4$

$= x^2 + 4x + 4$

Jadi $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

c. Selisih Dua Kuadrat

Setelah kita mempelajari tentang perkalian suku dua dengan dirinya sendiri (bentuk kuadrat), sekarang kita akan membahas perkalian suku dua antara $(x+y)$ dan $(x\text{-}y)$. Langkah-langkah penyelesaiannya sama saja dengan penyelesaian bentuk $(x + y)^2$ dan $(x - y)^2$ yaitu:

$(x + y)(x - y) = (x + y)(x - y)$ (selisih dua kuadrat)

$= x(x - y) + y(x - y)$ (sifat distributif)

$= ((x.x)-(x.y))+((y.x)-(y.y))$ (sifat distributif)

$= x^2 - xy + yx + y^2$ (sifat komutatif)

$= x^2 + y^2$

Bentuk di atas dikenal dengan istilah selisih dua kuadrat. Agar lebih memahami tentang selisih dua kuadrat, pehatikan contoh berikut ini!

Contoh

Tentukan hasil kali dari $(x - 3)(x + 3)$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}(x - 3)(x + 3) &= (x - 3)(x + 3) \\ &= (x.x) + (x.3) + ((-3)x) + ((-3)(3)) \\ &= x^2 + (3x) - 3x - 9 \\ &= x^2 - 9\end{aligned}$$

Jadi $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$

Latihan Soal

Selesaikan bentuk aljabar berikut ini!

1. $(x + 2)(x - 3)$
2. $(x - 5)(2x + 4)$
3. $-(2x - 3)(3x + 7)$
4. $(-x - 3)(x + 2)$
5. $(4p - 2)^2$
6. $(a + 3)^2$
7. $-(a - 2)^2$
8. $(-2p + 3)^2$
9. $-(5b + 3)^2$
10. $(2z - 3)^2$
11. $(2x + 5)(2x - 5)$
12. $(-3x - 2)(3x - 2)$
13. $(5x - 2)(5x + 2)$
14. $(4a + 5b)(4a - 5b)$
15. $(2a - 3b)(2a + 3b)$

C Pemfaktoran Suku Aljabar

Kalian masih ingat dengan istilah faktor suku aljabar? Bentuk aljabar xy merupakan perkalian dari x dengan y ($xy = x \times y$). Maka yang menjadi faktor dari xy adalah x dan y. Begitu juga dengan bentuk $a(x + y)$, dimana faktor dari $a(x + y)$ adalah a dan $(x + y)$. Jadi, yang dimaksud dengan pemfaktoran bentuk aljabar adalah menyatakan bentuk penjumlahan suku-suku ke dalam bentuk perkalian atau faktor.

1 Hukum Distributif dan Faktor Persekutuan Aljabar

Masih ingat dengan hukum distributif untuk bilangan a, b, c anggota bilangan real? pada hukum distributif berlaku aturan

$$\underbrace{a \times (b + c)}_{\text{Faktor}} = \underbrace{(a \times b) + (a \times c)}_{\text{Penjumlahan suku-suku}}$$

Untuk memfaktorkan bentuk aljabar dapat menggunakan hukum distributif. Langkah pertama yang harus dilakukan adalah mencari faktor persekutuan terbesar dari setiap suku aljabar. Perhatikan contoh berikut.

Contoh

Faktorkanlah bentuk aljabar berikut ini!

a. $2x^2 + 8x^2y$

b. $12abc + 15xyz$

c. $3x^2y - 15xy^2z$

Penyelesaian:

a. $2x^2 + 8x^2y = 2x^2(1 + 4y)$ (FPB $2x^2$ dan $8x^2y = 2x^2$)

b. $12abc + 15xyz = 3(4abc + 5xyz)$ (FPB $12abc$ dan $15xy^2z = 3$)

c. $3x^2y - 15xy^2z = 3xy(x - 5yz)$ (FPB $3x^2y$ dan $15xy^2z = 3xy$)

Latihan Soal

Faktorkanlah bentuk aljabar berikut ini!

1. $4xy - bx^2y$
2. $3x^2y + 6xy^2 + 12$
3. $-(abc + bad)$
4. $9ax^2 + 12ab + 21$
5. $2xy + 8yz + xy^2$
6. $3x^2 + 6x - 24$
7. $4a^2 + 6ab^2 + 8abc^2$
8. $14a^2y + 2ax + 24ay$
9. $16ax^2 + 17b^2x + 19x$
10. $8a^2z + 16a^2y + 36a$

2 Faktorisasi Bentuk $x^2 + 2xy + y^2$

Ayo kita tinjau kembali hasil perkalian bentuk $(x + y)^2$. Hasil perkalian dari $(x + y)^2$ adalah $x^2 + 2xy + y^2$. Bentuk seperti ini disebut sebagai bentuk kuadrat sempurna.

Bentuk kuadrat sempurna mempunyai beberapa ciri khusus, yaitu:

a. Koefisien peubah pangkat dua (x^2) sama dengan 1.

b. Konstanta merupakan hasil kuadrat setengah koefisien x.

Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Faktorkanlah bentuk kuadrat sempurna dari $x^2 + 8x + 16$!

Penyelesaian:

Konstanta = $(\frac{1}{2} \times 8)^2 = 4^2$, maka

$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 8x + (4)^2$

$= (x + 4)^2 = (x + 4)(x + 4)$

Selain dengan cara di atas, memfaktorkan bentuk kuadrat sempurna dapat diselesaikan dengan hukum distributif. Caranya adalah mengubah suku $2xy$ menjadi penjumlahan dua suku $(xy + xy)$, kemudian suku-suku tersebut difaktorkan.

Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Faktorkanlah bentuk kuadrat sempurna dari $x^2 + 8x + 16$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 16 &= x^2 + 4x + 4x + 16 \\ &= (x^2 + 4x) + (4x + 16) \\ &= x(x + 4) + 4(x + 4) \\ &= (x + 4)(x + 4) \\ &= (x + 4)^2 \end{aligned}$$

Jadi faktor dari $x^2 + 4x + 16$ adalah $(x + 4)^2$

3 Faktorisasi Bentuk Kuadrat $ax^2 + bx + c$

Selain faktorisasi bentuk $x^2 + 2xy + y^2$, faktorisasi bentuk kuadrat terdapat pula dalam bentuk $ax^2 + bx + c$; dengan a, b, dan c merupakan bilangan real. a dan b merupakan koefisien, c adalah konstanta. Sedangkan yang menjadi peubah atau variabel adalah x^2 dan x.

a. Memfaktorkan bentuk $ax^2 + bx + c$, jika $a = 1$

Untuk memfaktorkan bentuk aljabar seperti ini, kalian harus memperhatikan bentuk perkalian suku $(x + y)$ dengan $(x + z)$ berikut.

$$\begin{aligned} (x + y)(x + z) &= x(x + z) + y(x + z) && \text{(sifat distributif)} \\ &= ((x.x)+(x.z))+((y.x)+(y.z)) && \text{(sifat distributif)} \\ &= x^2 + xz + xy + yz \\ &= x^2 + (y + z)x + yz \end{aligned}$$

Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Faktorkanlah bentuk aljabar dari $x^2 + 7x + 12$!

Penyelesaian:

$$x^2 + 7x + 12 = x^2 + (y + z)x + yz$$

$y + z = 7$

$yz \quad = 12$

y dan z yang memenuhi adalah $y = 3$ dan $z = 4$ atau $y = 4$ dan z = 3.

Jadi bentuk kuadrat dari $x^2 + 7x + 12$ adalah:

$(x+y)(x+z) = (x + 3)(x + 4)$

atau

$(x+y)(x+z) = (x + 4)(x + 3)$.

b. Memfaktorkan bentuk $ax^2 + bx + c$, jika $a \neq 1$

Kalian telah memahami bahwa pemfaktoran bentuk $ax^2 + bx + c$, jika a = 1 adalah $(x + y)(x + z)$. Dengan menurunkan rumus tersebut kita dapat memperoleh rumus pemfaktoran $ax^2 + bx + c$ untuk $a \neq 1$. Perhatikan pemfaktoran berikut!

$ax^2 + bx + c \ = (x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$ (bagi setiap suku dengan a)

Selanjutnya kita cari bilangan yang jika dijumlahkan hasilnya sama dengan $\frac{b}{a}$ dan jika dikalikan hasilnya sama dengan $\frac{b}{c}$. Misalkan kedua bilangan tersebut adalah $\frac{p}{a}$ dan $\frac{q}{a}$, maka kita peroleh faktor $(x + \frac{p}{a})(x + \frac{q}{a})$, sehingga:

1. $\frac{p}{a} + \frac{q}{a} = \frac{b}{a}$

   $\frac{(p+q)}{a} = \frac{b}{a}$

   maka $p + q = b$

2. $\frac{p}{a} \times \frac{q}{a} =$

   maka $\frac{pq}{a^2}\,\frac{c}{a} = \frac{c}{a}$, (kalikan dengan a^2)

   sehingga, $pq = ac$.

Jadi faktor dari $ax^2 + bx + c$, untuk $a \neq 1$ adalah $a(x+\frac{p}{a})\ (x+\frac{q}{a})$.

dimana bilangan p, q harus memenuhi syarat (1) dan (2), yaitu: $p + q = b$ dan $pq = ac$.

Contoh

Faktorkanlah bentuk aljabar $2x^2 + 3x - 14$!

Penyelesaian:

$2x^2 + 3x - 14 = a(x+\frac{p}{a})(x+\frac{q}{a})$

Berdasarkan soal, diperoleh nilai $a = 2$, $b = 3$, dan $c = -14$,

sehingga: $pq = ac = -28$

$p + q = b = 3$

Nilai p dan q yang memenuhi adalah $p = -4$ dan $q = 7$, atau p = 7 dan $q = -4$.

Jadi,

- Untuk $p = -4$ dan $q = 7$

  $2x^2 + 3x - 14 = 2(x + \frac{-4}{2})(x + \frac{7}{2}) = (x - 2)(2x + 7)$

- Untuk $p = 7$ dan $q = -4$

  $2x^2 + 3x - 14 = 2(x + \frac{7}{2})(x + \frac{-4}{2}) = (2x + 7)(x - 2)$

Jadi faktor dari $2x^2 + 3x - 14$ adalah $(2x + 7)(x - 2)$

Latihan Soal

Faktorkanlah bentuk kuadrat di bawah ini!

1. $x^2 - 4x + 4$
2. $x^2 + 2x + 1$
3. $x^2 + 12x + 36$
4. $x^2 - 20x + 100$
5. $x^2 - 14x + 48$
6. $-2x^2 + 11x - 15$
7. $a^2 - 7a + 10$
8. $a^2 - 6a + 8$
9. $x^2 - 24x + 143$
10. $x^2 + 4x + 3$
11. $x^2 - 6x + 1$
12. $x^2 - x - 6$
13. $2x^2 + 8x + 6$
14. $3x^2 + 5x - 2$
15. $4x^2 + 4x - 8$
16. $5x^2 - 5x + 10$
17. $6x^2 - x - 12$
18. $-3x^2 + 10x - 8$

D Pecahan dalam Bentuk Aljabar

Pengerjaan pecahan bentuk aljabar pernah kalian pelajari di kelas VII. Masih ingatkah kalian? Mari kita ingat kembali dengan menyimak pembahasan berikut!

1 Penjumlahan dan Pengurangan Pecahan Bentuk Aljabar

Operasi penjumlahan dan pengurangan pecahan bentuk aljabar sama seperti penjumlahan dan pengurangan pada pecahan biasa. Apabila penyebutnya sudah sama, maka operasi penjumlahan atau pengurangannya dapat langsung dilakukan pada pembilangnya. Secara matematis ditulis $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$.

Namun jika penyebutnya tidak sama, maka kita harus menyamakannya terlebih dahulu dengan mencari KPK dari penyebut-penyebut tersebut.

Contoh

Selesaikanlah operasi penjumlahan dan pengurangan pada pecahan bentuk aljabar berikut!

a. $\frac{3ab}{4z} + \frac{5ab}{4z}$

b. $\frac{2x}{y} - \frac{4x}{z}$

Penyelesaian:

a. $\frac{3ab}{4z} + \frac{5ab}{4z} = \frac{3ab + 5ab}{4z} = \frac{8ab}{4z} = \frac{2ab}{z}$

b. $\frac{2x}{y} - \frac{4x}{z} = \frac{2xz}{yz} - \frac{4xy}{yz}$ KPK dari y dan z adalah yz

$= \frac{2xz - 4xy}{yz} = \frac{2x(z-2y)}{yz}$

Latihan Soal

Selesaikan operasi penjumlahan dan pengurangan berikut ini!

1. $\frac{5xy}{2a} + \frac{7xy}{5a}$
2. $\frac{2a^2b}{xy} + \frac{5a^2b}{yz}$
3. $\frac{2}{3a} + \frac{5}{2a}$
4. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y}$
5. $\frac{4x}{7} + \frac{2x}{7}$
6. $\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}$
7. $2(\frac{x}{2} + 3)$
8. $\frac{3}{2x} + \frac{4-1}{2xy}$
9. $\frac{3}{5x} + \frac{2}{3x} - \frac{1}{2}$
10. $-(\frac{2}{7xy} + \frac{3}{4xy})$

2 Perkalian Bentuk Aljabar

Perkalian pecahan bentuk aljabar dilakukan dengan mengalikan pembilang dengan pembilang dan penyebut dikalikan dengan penyebut. Secara matematis dirumuskan $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ dengan $b \neq 0$ dan $d \neq 0$.

Contoh

Selesaikanlah perkalian pada pecahan bentuk aljabar berikut!

a. $\frac{3ab}{2x} \times \frac{5ab}{3y}$ b. $\frac{2x}{a} \text{ x } \frac{4b}{y}$

Penyelesaian:

a. $\frac{3ab}{2x} \times \frac{5ab}{3y} = \frac{3ab \times 5ab}{2z \times 3y} = \frac{(3 \times 5) \times a^2b^2}{(2 \times 3) \times xy} = \frac{5a^2b^2}{2xy}$

b. $\frac{2x}{a} \text{ x } \frac{4b}{y} = \frac{2x \times 4b}{a \times y} = \frac{(2 \times 4) \times xb}{ay} = \frac{8xb}{\text{ay}}$

3 Pembagian Bentuk Aljabar

Sewaktu di kelas VII kalian belajar operasi pembagian bentuk aljabar pada suku tunggal, maka pada bab ini kita akan melakukan operasi pembagian dengan suku dua atau suku tiga.

Pembagian pada pecahan sama artinya dengan mengalikan pecahan tersebut dengan kebalikan dari pecahan pembagi. Secara matematis pembagian pecahan dituliskan sebagai berikut.

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} =$ dengan $b \neq 0$, $c \neq 0$, dan $d \neq 0$.

Contoh

Hitung operasi pembagian dari bentuk aljabar berikut!

a. $\frac{3a}{2x} : \frac{x}{4a}$ b. $\frac{5a}{2b} : \frac{a}{3b}$

Penyelesaian:

a. $\frac{3a}{2x} : \frac{x}{4a} = \frac{3a}{2x} \times \frac{4a}{x} = \frac{12a^2}{2x^2} = \frac{6a^2}{x^2}$

b. $\frac{5a}{2b} : \frac{a}{3b} = \frac{5a}{2b} \times \frac{3b}{a} = \frac{15ab}{2ab} = \frac{15}{2}$

Latihan Soal

Hitunglah operasi perkalian dan pembagian berikut ini!

1. $\frac{c}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$
2. $\frac{1}{3a} \times \frac{5}{6a}$
3. $\frac{1}{4}a \times \frac{2}{5}b \times \frac{3}{7}c$
4. $\frac{6}{a^2b} \times \frac{2a}{abx}$
5. $\frac{(a+b)}{(x-y)} \times \frac{(1-4a^2)}{(x+y)}$
6. $\frac{2}{5a} : \frac{3}{5a}$
7. $\frac{3}{x+1} : \frac{2}{x+2}$
8. $\frac{(x^2+2x+1)}{3x} : \frac{(x^2-2x)}{x}$
9. $\frac{(4x^2+1)}{3x} : \frac{2x}{(x^2+1)}$
10. $\frac{1}{(x^2+2)} : \frac{(x^2+2)}{x}$

4 Menyederhanakan pecahan bentuk aljabar

Suatu pecahan bentuk aljabar dapat disederhanakan apabila pembilang dan penyebutnya memiliki faktor persekutuan atau faktor yang sama. Maka untuk menyederhanakan pecahan ini, kita harus mencari faktor persekutuan dari pembilang dan penyebutnya terlebih dahulu. Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Sederhanakanlah bentuk aljabar berikut ini!

a. $8ax^2 + 24xy^2$

b. $\frac{a^2b^3c}{abc^2}$

Penyelesaian:

a. $8ax^2 + 24xy^2 = 8x\,(ax + 3y^2)$ (faktor dari $8ax^2$ dan $24xy^2 = 8x$)

b. $\frac{a^2b^3c}{abc^2} = \frac{a^2 \times b^3 \times c}{a \times b \times c^2} = \frac{a \times b^2}{c} = \frac{ab^2}{c}$

Latihan Soal

Sederhanakanlah!

1. $\frac{4p^2q}{2pr}$
2. $\frac{6x}{2x-3}$
3. $\frac{4r^3t^2}{12r^2t}$
4. $\frac{4x+8}{2}$
5. $\frac{x^2-9}{x^2-9x+18}$
6. $\frac{x+8x-9}{x^2-1}$
7. $\frac{x^2+1}{x^2+x-2}$
8. $\frac{a^2-1}{a+1}$
9. $\frac{2x^2-2}{2x^2-3x+1}$
10. $\frac{x(x^2+4)}{x+2}$
11. $\frac{16xy^3z}{4x^2yz^2}$
12. $\frac{6p^2q}{3p}$

E Penggunaan Sifat Operasi Aljabar dalam Aritmetika

Pada awal bab ini kalian disuguhi persoalan tentang pembelian barang di sebuah supermarket. Kalian harus menghitung berapa harga yang harus dibayar oleh si pembeli. Persoalan seperti ini merupakan salah satu hal yang dipelajari dalam aritmetika.

Aritmetika merupakan cabang ilmu matematika yang berhubungan dengan kegiatan ekonomi, bisnis, dan sosial. Dengan adanya bentuk aljabar dan operasi hitungnya, kita dapat menyelesaikan perhitungan aritmetika sosial dan bidang ilmu lainnya.

Contoh

Dini membeli 100 m kain dengan harga Rp 35.000,00/m. $\frac{2}{5}$ bagian dari kain tersebut ia jual dengan harga Rp 42.000,00/m dan sisanya dijual Rp 33.000,00/m. Tentukan keuntungan atau kerugian dari penjualan kain tersebut!

Penyelesaian:

Harga pembelian: 100 m × Rp 35.000,00 = Rp 3.500.000,00

Harga penjualan:

- $\frac{2}{5}$ × 100 m × Rp 42.000,00 = Rp 1.680.000,00
- $\frac{3}{5}$ × 100 m × Rp 33.000,00 = Rp 1.980.000,00

Jadi total penjualan = Rp 3.660.000,00

Ternyata harga penjualan > harga pembelian (untung)

Jadi keuntungan dari penjualan tersebut adalah:

Rp 3.660.000,00 - Rp 3.500.000,00 = Rp 160.000,00.

Latihan Soal

1. Kuadrat suatu bilangan ditambah dengan lima kalinya sama dengan 14. Tuliskan persamaan tersebut dalam bentuk aljabar!
2. Seorang pedagang membeli 50 kg mentega dan 75 kg terigu seharga Rp 400.000,00. Kemudian kedua barang tersebut ia jual kembali dengan harga mentega Rp 4.200,00/kg dan terigu Rp 4.500,00/kg. Tentukan apakah pedagang tersebut mendapat untung atau rugi!
3. Sebidang tanah berbentuk persegi panjang dengan lebar x + 2 m dan panjang x + 7 m. Keliling persegi panjang tersebut 54 m. Tentukan:
   a. panjang dan lebar tanah
   b. luas tanah

4. Seorang pengusaha membeli kayu jati seharga Rp 500.000,00. Kayu jati tersebut kemudian diolah menjadi seperangkat kursi tamu sehingga dapat terjual seharga Rp 1.200.000,00. Jika proses pembuatan kursi tersebut mengeluarkan biaya sebesar Rp 350.000,00, tentukan:
   a. besar keuntungan atau kerugian pengusaha
   b. berapa persenkah keuntungan atau kerugian tersebut!
5. Siswanto berniat membuka peternakan ayam petelur dengan modal awal Rp 5.000.000,00. Modal tersebut untuk membeli 500 ekor induk ayam. Dari 500 ayam tersebut, ternyata $\frac{1}{5}$ bagian mati. Siswanto tidak merasa yakin dengan usahanya. Akhirnya, ia menjual semua ayam yang masih hidup seharga Rp 7.000,00/ekor. Tentukan keuntungan/kerugian yang dialami Siswanto!

Tugas

Salin dan lengkapilah tabel berikut ini!

No.	Barang	Harga	Pot. Harga	Harga setelah diskon
1	MP3	Rp 300.000,00	...	Rp 270.000,00
2	MP4	Rp 500.000,00	5%	...
3	Ipod	Rp 2.000.000,00	1,5%	...
4	Walkman	Rp 800.000,00	...	Rp 780.000,00
5	Hp	Rp 1.700.000,00	...	Rp 1.666.000,00

Otak-Atik Matematika

Seorang pengusaha stroberi hendak membuka perkebunan baru di daerah Bandung utara. Untuk itu ia membeli sebidang tanah seluas 700 m^2 dengan harga Rp 35.000,00/m^2. Kemudian ia menggarap tanah tersebut selama 3 hari. Proses penggarapan tanah tersebut memerlukan bantuan 3 orang tukang dengan ongkos Rp 15.000,00/hari. Setelah itu ia membeli 500 bibit stroberi seharga Rp 5.000,00/pohon. Setelah panen ia menjual seluruh stroberi-nya sehingga dapat meraup keuntungan sebesar 35%. Tentukan:

a. besar laba yang didapatkan pengusaha
b. harga penjualan stroberi

Rangkuman

1. Bentuk aljabar satu suku disebut suku tunggal.
   Bentuk aljabar dua suku disebut suku binom.
   Bentuk aljabar banyak suku disebut polinom.
2. Bentuk aljabar yang mempunyai suku lebih dari suku dua atau mempunyai suku yang peubahnya berpangkat lebih dari dua disebut suku banyak.
3. Bentuk perkalian suku dua:
   (i) $(a+b)(c+d) = (ac+bc) + (ad+bd)$
   (ii) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
   (iii) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
   (iv) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
4. Pemfaktoran bentuk aljabar adalah menyatakan bentuk penjumlahan suku-suku kedalam bentuk perkalian atau faktor.
5. Faktorisasi bentuk $ax^2 + bx + c = 1$, jika $a = 1$ adalah $(x+y)(x+z)$
   Faktorisasi bentuk $ax^2 + bx + c = 1$, jika $a \neq 1$ adalah $a(x+\frac{p}{a})\ (x+\frac{q}{a})$

Uji Kemampuan

A. Pilihlah jawaban yang paling tepat, a, b, c, atau d! Tuliskan pada lembar jawabanmu!

1. Bentuk sederhana dari $-(2xy + 8x^2y) + 3x^2y - 5xy$ adalah ....
   a. $xy(5x - 7)$
   b. $xy(-5x + 7)$
   c. $-xy(7 + 5x)$
   d. $-xy(7 - 5x)$
2. Salah satu faktor dari $x^2 + 5x + 4$ adalah ....
   a. $(x + 1)$
   b. $(x - 1)$
   c. $(x + 5)$
   d. $(x - 4)$
3. Hasil dari $(x + 2)^2$ adalah ....
   a. $x^2 + 4$
   b. $-x^2 - 4$
   c. $x^2 + 4x + 4$
   d. $x^2 + 2x + 4$
4. Hasil dari $(x + 5)(-x - 5)$ adalah ....
   a. $x^2 - 10x - 25$
   b. $-x^2 - 10x - 25$
   c. $x^2 + 10x + 25$
   d. $-x^2 - 10x + 25$
5. $\frac{5}{2}x + \frac{2}{3}x$ adalah ....
   a. $\frac{7}{5}x$
   b. $\frac{17}{5}x$
   c. $\frac{19}{x}$
   d. $\frac{19}{6}x$

6. Hasil dari $-xy^2 \times 4a^2bc \times 2xy(-3ab)$ adalah ....
   a. $24x^2y^3a^3b^2c$
   b. $-24x^2y^3a^3b^2c$
   c. $24x^2y^3a^2b^2c$
   d. $-24x^2y^3a^2b^2c$

7. Hasil bagi dari $\frac{5xyz}{6abc} : \frac{3x}{2ac}$ adalah ....
   a. $\frac{10ay}{18b}$
   b. $\frac{5yz}{9b}$
   c. $\frac{5x^2yz}{2ac}$
   d. $\frac{10ay}{18b^2}$

8. Bentuk kuadrat yang mempunyai faktor $x = 5$ dan $x = -2$ adalah ....
   a. $x^2 - 3x - 10$
   b. $x^2 - 7x - 10$
   c. $x^2 + 7x + 10$
   d. $x^2 + 3x - 10$

9. Bentuk sederhana dari $\frac{4x+8xy}{2}$ adalah ....
   a. $2x(1 + 2y)$
   b. $2(x + y)$
   c. $4x(1 + 2y)$
   d. $4(x + 2y)$

10. Faktor dari $x^2 - 11x + 30$ adalah ....
    a. -5 dan 6
    b. 5 dan 6
    c. 5 dan -6
    d. -5 dan -6

11. Jumlah dari $-3p^2 + 5p + 2$ dan $(p - 2)(p + 2)$ adalah ....
    a. $-2p^2 + p - 2$
    b. $-2p^2 + 5p + 2$
    c. $-4p^2 + 5p + 2$
    d. $-2p^2 + 5p - 2$

12. Hasil dari $(5x - 2y)(2x - y)^2$ adalah ....
    a. $20x^3 + 2y^3 - 28x^2y + 13xy^2$
    b. $20x^3 - 2y^3 + 28x^2y + 13xy^2$
    c. $20x^3 - 2y^3 - 28x^2y + 13xy^2$
    d. $20x^3 - 2y^3 - 28x^2y - 13xy^2$

13. Bentuk paling sederhana dari $\frac{(x^3 - x^2)}{(x^2 + 2x - 3)}$ adalah ....
    a. $\frac{x^2}{x - 3}$
    b. $\frac{x^2}{x + 3}$
    c. $\frac{x}{x - 3}$
    d. $\frac{x}{x + 3}$

14. Pemfaktoran dari $\frac{(x^2 + x - 6)}{(x^2 - 4)}$ adalah ....
    a. $\frac{x + 3}{x - 2}$
    b. $\frac{x - 3}{x - 2}$
    c. $\frac{x - 3}{x + 2}$
    d. $\frac{x + 3}{x + 2}$

15. Pemfaktoran dari $6a^2 + 7a - 20$ adalah ....
    a. $(6a - 4)(a + 5)$
    b. $(6a + 4)(a - 5)$
    c. $(3a + 4)(2a - 5)$
    d. $(3a - 4)(2a + 5)$

B. Selesaikan soal-soal berikut ini!

1. Suatu taman berbentuk segitiga dengan keliling 600 m. Ukuran sisi-sisi segitiga tersebut adalah x, $x + 160$, dan $x + 140$. Tentukan nilai x dan luas taman tersebut!
2. Selesaikan bentuk aljabar di bawah ini!
   a. $3x^2y + 5x^2 + 6y + 2x(x + xy)$
   b. $2x(3x - y + 3) - 5y(6x + y - 5)$
   c. $(x + 5)(3x^2 - 2x + 8)$
   d. $2(a^2 + b) - 3a^2(3 + b^2) + 4a^2b^2$
   e. $\dfrac{(3x - 9)}{(2x^3 + x^2 - 16x - 15)}$
3. Faktorkanlah!
   a. $2x^3 + 4x^2 - 3x - 6$
   b. $2x^4 + x^3 + 2x^2 - x$
   c. $2x^3 - 18x$
   d. $\dfrac{x^2 - 3}{2x - 1}$
   e. $x^2 + x - \dfrac{15}{4}$
4. Syarif membeli sepatu olah raga seharga a rupiah. Karena merasa tidak cocok, sepatu tersebut ia jual lagi dengan harga Rp 275.000,00. Akibatnya ia mengalami kerugian sebesar 21,4%. Berapa harga sepatu tersebut ketika dibeli oleh Syarif!
5. Saputangan Azizah berbentuk persegi, sedangkan sapu tangan Fitri berbentuk persegi panjang. Jika sapu tangan Azizah berukuran x cm, dan ukuran sapu tangan Fitri $(x + 4)(x - 3)$. Tentukan nilai x dan luas sapu tangan mereka masing-masing!

KUNCI JAWABAN BAB 1

A. Pilihan Ganda

1. c
3. c
5. d
7. b
9. a
11. d
13. b
15. d

B. Uraian

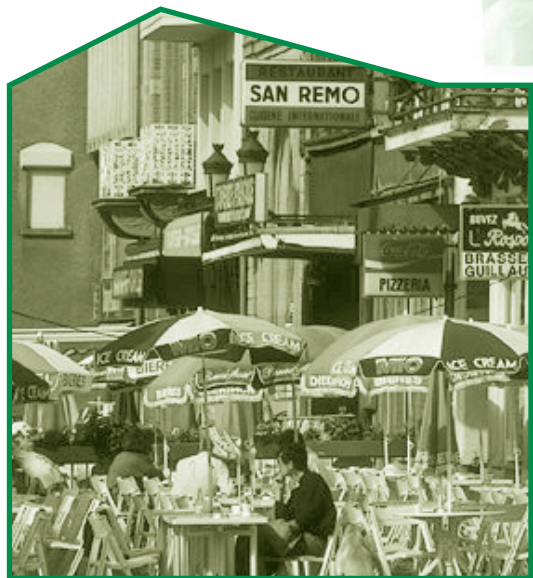
1. $x = 100$ m
   luas = 12.000 m^2
3. a. $(2x^2 - 3)(x + 2)$
   c. $2x(x - 3)(x + 3)$
   e. $(x - \frac{3}{2})(x + \frac{5}{2})$
5. $x = 12$ cm
   Saputangan Azizah= 144 cm^2
   Saputangan Fitri = 144 cm^2

Bab 2

Fungsi

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini siswa diharapkan mampu:

- Memahami pengertian relasi serta penyajiannya dalam diagram panah, diagram kartesius dan himpunan pasangan berurutan;
- Menjelaskan pengertian hasil kali kartesius;
- Memahami pengertian fungsi serta penyajiannya dalam diagram panah, diagram kartesius dan himpunan pasangan berurutan;
- Menentukan banyaknya pemetaan atau fungsi;
- Memahami pengertian korespondensi satu-satu dari dua buah himpunan;
- Menyelesaikan soal cerita yang berhubungan dengan relasi dan fungsi;
- Menghitung nilai suatu fungsi dan menyusunnya dalam tabel serta menggambar grafik fungsi.

Relasi secara bahasa artinya hubungan. Banyak contoh aktivitas yang menunjukkan hubungan. Misalnya, penyedia bahan bangunan merupakan relasi dari kontraktor bangunan, pengusaha *cafe* atau restoran mempunyai relasi dengan jenis menu makanan yang dihidangkannya, atau murid SMP mempunyai hubungan atau relasi dengan mata pelajaran kegemarannya. Dapatkah kalian menyebutkan contoh relasi yang lain? Mari kita pelajari berbagai macam relasi pada pelajaran berikut!

Peta konsep

Fungsi
A. Relasi
1. Pengertian relasi dan penyajiannya
2. Hasil kali kartesius
3. Himpunan pasangan berurutan
B. Pemetaan atau fungsi
1. Pengertian fungsi dan notasinya
2. Penyajian fungsi
3. Menentukan banyaknya pemetaan atau fungsi
4. Korespondensi satu-satu
C. Menyelesaikan soal cerita yang berhubungan dengan relasi dan pemetaan
D. Nilai fungsi
1. Menghitung nilai suatu fungsi
2. Menyusun tabel fungsi
3. Menggambar grafik fungsi
E. Menentukan nilai perubahan fungsi jika variabel berubah

A Relasi

Dalam matematika, relasi berfungsi untuk menyatakan suatu hubungan tertentu antara dua himpunan. Misalnya hubungan antara siswa dengan kegemarannya, hubungan orang tua dengan penghasilannya, hubungan anak dengan mainan kesukaannya, dan sebagainya. Apa pengertian relasi dalam matematika?

1 Pengertian Relasi dan Penyajiannya

Pada suatu hari di kelas VIII-A SMP "Asih Bangsa", Aam, Ilham, Trisno, Lisda, dan Siti sedang membicarakan mata pelajaran yang mereka sukai di sekolah. Matematika, IPA, kesenian, olahraga, IPS, dan PPKn adalah beberapa mata pelajaran yang mereka sukai saat itu. Aam mengemari pelajaran IPA, kesenian dan olahraga. Ilham menggemari pelajaran matematika dan olahraga, Trisno menggemari pelajaran matematika dan IPA, Lisda gemar pelajaran PPKn dan kesenian, sedangkan Siti gemar pelajaran IPS dan olahraga.

Jika kalian perhatikan, Aam, Ilham, Trino, Lisda, dan Siti merupakan himpunan siswa SMP. Sedangkan Matematika, IPA, kesenian, olahraga, IPS, dan PPKn merupakan himpunan mata pelajaran. Himpunan siswa mempunyai hubungan dengan himpunan mata pelajaran melalui "kegemaran". Dengan demikian, kata "gemar" merupakan relasi yang menghubungkan antara himpunan siswa kelas VIII-A dengan mata pelajaran di sekolah.

Jadi, relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah hubungan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A dengan anggota himpunan B.

Contoh

Tentukanlah relasi yang dapat menghubungkan himpunan P ke himpunan Q berikut ini!

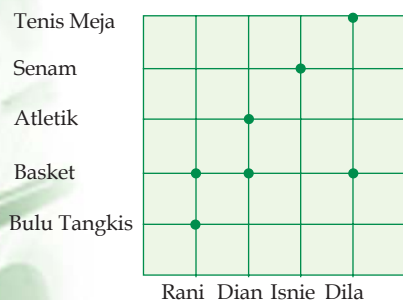
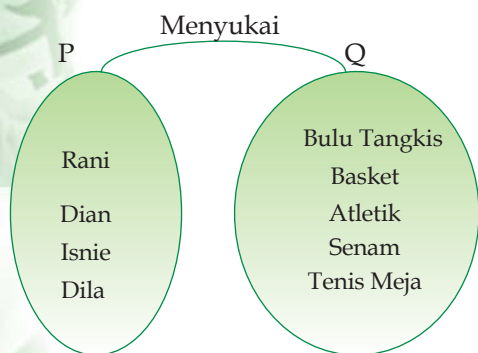
$P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $Q = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

Penyelesaian:

Relasi yang dapat menghubungkan antara himpunan P ke himpunan Q adalah "akar dari"

Relasi yang menghubungkan himpunan yang satu dengan himpunan lainnya dapat disajikan dalam beberapa cara, yaitu diagram panah, diagram kartesius, dan himpunan pasangan berurutan. Perhatikan uraian berikut ini!

Rani, Dian, Isnie, dan Dila sedang berbincang-bincang di sebuah taman dekat sekolah. Mereka sedang membicarakan olahraga kegemarannya masing-masing. Rani menyukai olahraga bulu tangkis dan basket. Dian menyukai olahraga basket dan atletik, Isnie menyukai olahraga senam dan Dila menyukai olahraga basket dan tenis meja.

Misalkan himpunan *P* = {Rani, Dian, Isnie, Dila} dan *Q* = {Basket, Bulu Tangkis, Atletik, Senam, Tenis Meja}. Kata "menyukai" adalalah relasi yang menghubungkan himpunan *P* dan himpunan *Q*. Maka relasi tersebut dapat disajikan dalam bentuk berikut ini.

a. Diagram Panah

Anggota-anggota himpunan *P* berelasi dengan anggota himpunan *Q* dengan relasi "menyukai". Hal tersebut ditunjukkan dengan arah panah. Oleh karena itu, diagramnya disebut diagram panah.

Menyukai
P
Rani
Dian
Isnie
Dila
Q
Bulu Tangkis
Basket
Atletik
Senam
Tenis Meja

b. Diagram Kartesius

Diagram kartesius merupakan diagram yang terdiri atas sumbu X dan sumbu Y. Pada diagram kartesius, anggota himpunan *P* terletak pada sumbu mendatar (sumbu-*X*), sedangkan anggota himpunan *Q* terletak pada sumbu tegak (sumbu-*Y*). Relasi yang menghubungkan himpunan *P* dan *Q* ditunjukkan dengan noktah atau titik seperti terlihat pada gambar.

Tenis Meja
Senam
Atletik
Basket
Bulu Tangkis
Rani Dian Isnie Dila

c. Himpunan Pasangan Berurutan

Selain menggunakan diagram panah dan kartesius, sebuah relasi yang menghubungkan himpunan yang satu dengan himpunan lainnya dapat disajikan dalam bentuk himpunan pasangan berurutan. Adapun cara penulisannya adalah anggota himpunan *P* ditulis pertama, sedangkan anggota himpunan *Q* menjadi pasangannya.

Berdasarkan soal di atas, maka diperoleh himpunan pasangan berurutan sebagai berikut.

{(Rani, basket), (Rani, bulu tangkis), (Dian, basket), (Dian, atletik), (Isnie, senam), (Dila, basket), (Dila, tenis meja)}

Contoh

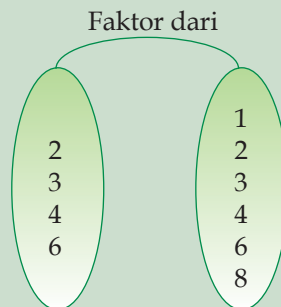
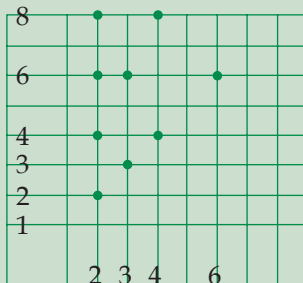
Himpunan P = {2, 3, 4, 6} dan Q = {1,2,3,4,6,8} dan "faktor dari" adalah relasi yang menghubungkan himpunan P ke himpunan Q. Nyatakan relasi tersebut dalam bentuk:

a. Diagram panah
b. Diagram kartesius
c. Himpunan pasangan berurutan

Penyelesaian:

a. Diagram panah

b. Diagram kartesius

c.

berurutan
8), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (4, 8), (6, 6)}

Latihan Soal

1. Jika himpunan A = {9, 16, 25, 36, 49} dan himpunan B = {3, 4, 5, 6 ,7} tentukan:
   a. Relasi dari himpunan A ke himpunan B
   b. Nyatakan relasi tersebut dalam diagram panah, diagram kartesius, dan himpunan pasangan berurutan!

2. Diketahui himpunan R = {Jakarta, Singapura, Manila, Kuala Lumpur, Bandar Seri Begawan} dan himpunan S = {Malaysia, Singapura, Brunei Darussalam, Filipina, Indonesia}. Tentukan:
   a. Relasi dari himpunan R ke himpunan S
   b. Nyatakan relasi tersebut dalam diagram panah, diagram kartesius, dan himpunan pasangan berurutan!
3. Himpunan $P = \{6, 10, 14, 22, 26\}$ dan $Q = \{7, 11, 13, 3, 5\}$, tentukan:
   a. Relasi yang mungkin dari himpunan P ke himpunan Q
   b. Nyatakan relasi tersebut dalam diagram panah, diagram kartesius, dan himpunan pasangan berurutan!

2 Hasil Kali Kartesius

Dalam suatu relasi tentu saja terdapat dua buah himpunan yang dihubungkan dengan relasi tertentu dan dapat disajikan dalam bentuk himpunan berurutan. Misalkan himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan $B = \{1, 2\}$. Himpunan pasangan berurutan dari himpunan A dan B yang mungkin adalah: $\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2), (d, 1), (d, 2)\}$

Himpunan pasangan berurutan seperti itu merupakan hasil kali kartesius dari himpunan A dan himpunan B. Hasil kali ini biasanya dilambangkan dengan $A \times B$. Secara matematis, hasil kali kartesius antara himpunan A dan himpunan B dapat ditulis dengan notasi berikut ini.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Jika diketahui banyak anggota himpunan A adalah $n(A) = r$ dan banyak anggota himpunan B adalah $n(B) = s$, dapatkah kamu menentukan banyaknya anggota $A \times B$? Agar kamu mengetahui bagaimana menentukan banyaknya anggota hasil kali kartesius dari dua buah himpunan, perhatikan contoh dan kegiatan berikut.

Contoh

Jika $P = \{2, 3, 5\}$ dan $Q = \{o, t, i, x\}$ tentukan:
a. $P \times Q$ b. $n(P \times Q)$

Penyelesaian:
a. $P \times Q = \{(2, o), (2, t), (2, i), (2, x), (3, o), (3, t), (3, i), (3, x), (5, o), (5, t), (5, i), (5, x)\}$
b. $n(P \times Q) = n(P) \times n(Q) = 3 \times 4 = 12$

Tugas

- Misalkan $A = \{a\}$ dan $B = \{1\}$ maka $A \times B = \{a, 1\}$
  $n(A) = 1$; $n(B) = 1$; $n(A \times B) = 1 = 1 \times 1$
- Misalkan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{1, 2\}$ maka
  $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$
  $n(A) = \ldots$; $n(B) = \ldots$; $n(A \times B) = \ldots = \ldots \times \ldots$
- Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1, 2\}$ maka
  $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
  $n(A) = \ldots$; $n(B) = \ldots$; $n(A \times B) = \ldots = \ldots \times \ldots$
- Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$ maka
  $A \times B = \{(a, 1),(a, 2), (a, 3) (b, 1), (b, 2), (b, 3) ,(c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$
  $n(A) = \ldots$; $n(B) = \ldots$; $n(A \times B) = \ldots = \ldots \times \ldots$

Dari hasil tersebut apa yang dapat kamu simpulkan? Adakah hubungan antara banyaknya himpunan $A \times B$ dengan banyaknya himpunan A dan B? Tulislah rumusnya!

Jika diketahui banyak anggota himpunan A adalah $n(A) = r$ dan banyak anggota himpunan B adalah $n(B) = s$ maka banyaknya anggota himpunan $A \times B$ adalah $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$.

Latihan Soal

$P = \{1, 3, 6\}$; $Q = \{a, b, c, d\}$; $R = \{p, e, l, i, t, a\}$; $S = \{i, l, m, u\}$; $T = \{o, k\}$

1. Tentukanlah:
   a. $P \times T$
   b. $n(P \times T)$
2. Tentukanlah:
   a. $P \times Q$
   b. $n(P \times Q)$
3. Tentukanlah:
   a. $P \times S$
   b. $n(P \times S)$
4. Tentukanlah:
   a. $P \times R$
   b. $n(P \times R)$
5. Tentukanlah:
   a. $Q \times R$
   b. $n(Q \times R)$
6. Tentukanlah:
   a. $S \times T$
   b. $n(S \times T)$

B Pemetaan Atau Fungsi

Konsep pemetaan atau fungsi memiliki keterkaitan dengan konsep relasi yang dibahas pada bagian sebelumnya. Apa yang dinamakan fungsi dan bagaimana menyajikannya, marilah kita pelajari pada pembahasan berikut!

1 Pengertian Fungsi dan Notasinya

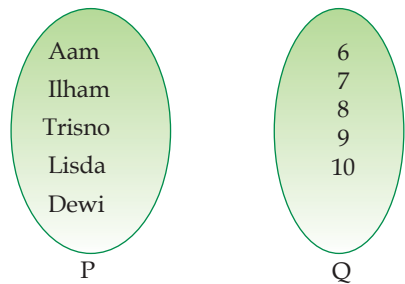
Banyak contoh yang menunjukkan hubungan atau relasi antara satu objek dengan objek lainnya. Misalnya relasi antara nama negara dan ibukotanya seperti terlihat pada diagram panah di samping.

Pada relasi tersebut terlihat bahwa setiap anggota himpunan *A* mempunyai pasangan tepat satu pada himpunan *B*.

Contoh relasi lainnya perhatikan diagram panah nilai ulangan matematika 5 orang siswa kelas VIII berikut.

Nilai Ulangan Matematika

Aam
Ilham
Trisno
Lisda
Dewi
P

6
7
8
9
10
Q

Relasi tersebut memiliki kekhususan seperti halnya relasi antara himpunan *A* dan himpunan *B*, yaitu setiap anggota *P* memiliki pasangan tepat satu pada anggota himpunan *Q*.

Relasi antara himpunan *A* dan *B* serta relasi antara himpunan *P* dan *Q* seperti ini dikenal dengan istilah *pemetaan* atau *fungsi* dari *A* ke *B* serta fungsi dari *P* ke *Q*.

> Jadi, pemetaan atau fungsi dari himpunan *A* ke himpunan *B* adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota himpunan *A* tepat satu anggota pada himpunan *B*.

Pada fungsi kalian akan mengenal istilah *domain* atau daerah asal, *kodomain* atau daerah kawan, serta *range* atau daerah hasil. Himpunan *P* = {Aam, Ilham, Trisno, Lisda, Dewi} disebut domain fungsi atau daerah asal. Himpunan *Q* = {6, 7, 8, 9, 10} disebut kodomain atau daerah kawan. Himpunan {7, 8, 9, 10} yang merupakan pasangan anggota daerah asal disebut daerah hasil atau range. Perhattikan contoh berikut.

Contoh

Suatu fungsi *f* dari himpunan *A* ke himpunan *B* dinyatakan dengan aturan $x + 2, x \in A$. Jika diketahui $A = \{2, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{1, 2, 3, ..., 12\}$, tentukan:

a. Himpunan pasangan berurutan dalam *f*

b. Daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari *f*

Penyelesaian:

a. Pemetaan f dari A ke B adalah $f : x \to x + 2$

$x = 2 \Rightarrow f(x) = 2 + 2 = 4$

$x = 3 \Rightarrow f(x) = 3 + 2 = 5$

$x = 5 \Rightarrow f(x) = 5 + 2 = 7$

$x = 7 \Rightarrow f(x) = 7 + 2 = 9$

Himpunan pasangan berurutan $(x, f(x)) = \{(2, 4), (3, 5), (5, 7), (7, 9)\}$

b. Daerah asal = {2, 3, 5, 7}

Daerah kawan = {1, 2, 3, ..., 12}

Daerah hasil = {4, 5, 7, 9}

Fungsi dari himpunan A ke himpunan B dinotasikan dengan huruf kecil, misalnya f dan ditulis $f: A \to B$ (dibaca f memetakan anggota himpunan A ke anggota himpunan B). Jika f adalah sebuah fungsi dari himpunan A ke himpunan B dengan $x \in A$ dan $y \in B$ maka peta x oleh f adalah y yang dinyatakan dengan $f(x)$. Dengan demikian, diperoleh rumus fungsi sebagai berikut.

$f : x \to y$ atau $f : x \to g(x)$

Tokoh

Istilah fungsi diperkenalkan oleh Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) *hampir 50 tahun setelah buku geometri dipublikasikan. Kemudian Leonard Euler* (1707 – 1783) *mengenalkan notasi fungsi sebagai y = f (x).*

Sumber: Encarta

Tugas

- Manakah relasi yang merupakan fungsi?
- Manakah relasi yang bukan merupakan fungsi? Apa alasannya?

Latihan Soal

1. Diketahui himpunan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dan $B = \{0, 1, 2, ..., 10\}$. Suatu pemetaan f dari A ke B dinyatakan dengan $f : x \rightarrow 5 - 2x$, $x \in A$, tentukan:
   a. Himpunan pasangan berurutan dalam f.
   b. Daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari f.
2. Diketahui himpunan $P = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$ dan $Q = \{-5, -4, ..., 5\}$. Suatu pemetaan g dari P ke Q dinyatakan dengan $g : x \rightarrow -x - 4$, $x \in P$, tentukan:
   a. Himpunan pasangan berurutan dalam g.
   b. Daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari g.
3. Diketahui himpunan $C = \{1, 2, ..., 40\}$ dan $D = \{3, 4, 5, 6\}$. Suatu pemetaan h dari D ke C, $h : x \rightarrow x^2 - 1$, $x \in D$, tentukan:
   a. Himpunan pasangan berurutan dalam h.
   b. Daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari h.
4. Diketahui $X = \{1, 2, 3, ..., 35\}$, Y = {bilangan ganjil kurang dari 17}. Suatu pemetaan k dari X ke Y, $k : x \rightarrow x^2 + 1$, $x \in Y$.
   a. Himpunan pasangan berurutan dalam k.
   b. Daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari k.

2 Penyajian Fungsi

Karena fungsi merupakan bentuk relasi, maka cara penyajian fungsi sama seperti cara penyajian relasi sebelumnya. Suatu fungsi dapat disajikan dalam bentuk diagram panah, diagram kartesius, dan himpunan pasangan terurut.

Contoh

Misalkan $P = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 5, 7, 10, 13, 17\}$. Jika fungsi f dari P ke Q adalah $f : x \rightarrow x^2 + 1$, $x \in P$, nyatakan fungsi f dalam:

a. Diagram panah
b. Diagram kartesius
c. Himpunan pasangan terurut

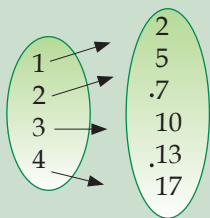
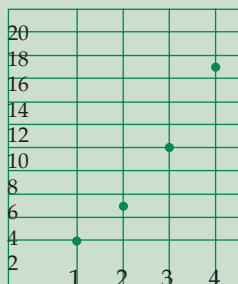
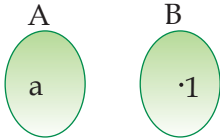
Penyelesaian:

$f : x \rightarrow x^2 + 1$

Daerah asal = {1, 2, 3, 4}

$f(1) = 1^2 + 1 = 2$; $f(2) = 2^2 + 1 = 5$; $f(3) = 3^2 + 1 = 10$; $f(4) = 4^2 + 1 = 17$

Daerah hasil = {2, 5, 10, 17}

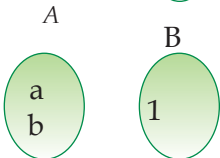
a. Diagram panah

b. Diagram kartesius

c. Himpunan pasangan terurut = {(1, 2), (2, 5), (3, 10), (4, 17)}

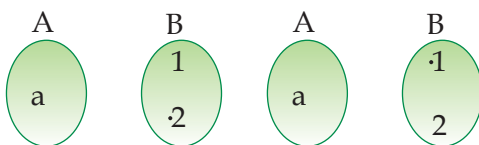
Latihan Soal

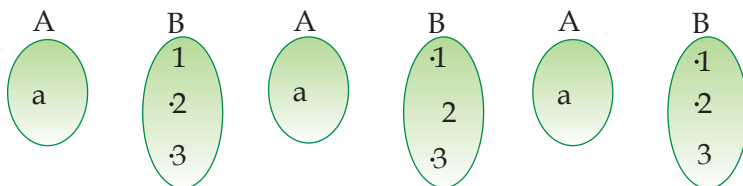
1. Misalkan A = {1, 3, 5, 7} dan B = {-11, -9, -7, -5, -3, -1 }. Jika fungsi f dari A ke B adalah $f : x \rightarrow 2x + 3, x \in A$, nyatakan fungsi f dalam:
   a. Diagram panah
   b. Diagram kartesius
   c. Himpunan pasangan terurut
2. Misalkan P = {2, 4, 6, 8} dan Q = {4, 8, 10, 14, 16, 22}. Jika fungsi g dari P ke Q adalah $g : x \rightarrow 3x - 2, x \in P$, nyatakan fungsi g dalam:
   a. Diagram panah
   b. Diagram kartesius
   c. Himpunan pasangan terurut
3. Misalkan R = {0, 1, 2, 3} dan S = {-8, -5, -3, 0, 3, 5}. Jika fungsi h dari R ke S adalah $h : x \rightarrow x^2 + 1, x \in R$, nyatakan fungsi h dalam:
   a. Diagram panah
   b. Diagram kartesius
   c. Himpunan pasangan terurut
4. Misalkan A = {1, 6, 13, 22} dan B = {1, 2, 3, 4, 5, 6 }. Jika fungsi f dari A ke B adalah $i : x \rightarrow \sqrt{x + 3}, x \in A$, nyatakan fungsi i dalam:
   a. Diagram panah
   b. Diagram kartesius
   c. Himpunan pasangan terurut

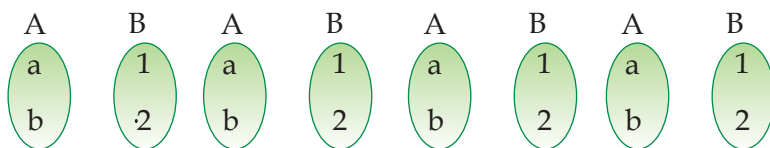
3 Menentukan Banyaknya Pemetaan atau Fungsi

Banyaknya pemetaan atau fungsi yang mungkin dari dua buah himpunan dapat kita tentukan. Bagaimana caranya? Perhatikan penjelasan berikut.

-

Misal himpunan A = {a} dan B = {1}, banyaknya pemetaan dari A ke B adalah 1, seperti terlihat pada gambar.

- Misal himpunan A = {a} dan B = {1, 2}, banyaknya pemetaan dari A ke B adalah 2, seperti terlihat pada gambar.

- Misal himpunan A = {a} dan B = {1, 2, 3}, banyaknya pemetaan dari A ke B adalah 3, seperti terlihat pada gambar.

-

Misal himpunan A = {a, b} dan B = {1}, banyaknya pemetaan dari A ke B adalah 1, seperti terlihat pada gambar.

- Misal himpunan A = {a, b} dan B = {1, 2}, banyaknya pemetaan dari A ke B adalah 4, seperti terlihat pada gambar.

Coba kalian perhatikan banyak pemetaan yang terbentuk dari dua himpunan tersebut! Apakah terdapat hubungan antara banyak pemetaan dengan banyaknya himpunan A dan B? Jika hasil tersebut kita masukkan dalam tabel maka akan diperoleh hasil berikut ini!

Banyak himpunan A $(n(A))$	Banyak himpunan B $(n(B))$	Banyak pemetaan yang mungkin dari A ke B
1	1	$1 = 1^1$
1	2	$2 = 2^1$
1	3	$3 = 3^1$
2	1	$1 = 2^1$
2	2	$4 = 2^2$
...	...	....
m	n	n^m

Dari tabel di atas dapat disimpulkan bahwa jika banyak anggota himpunan $A = m$ dan banyak anggota himpunan $B = n$ maka banyaknya pemetaan dari A ke B adalah n^m.

Latihan Soal

Tentukan banyak pemetaan atau fungsi yang mungkin dari A ke B kemudian gambarkan pemetaannya!

1. Jika himpunan $A = \{3, 4, 5\}$ dan $B = \{a, b\}$
2. Jika himpunan $A = \{3, 4\}$ dan $B = \{a, b, c\}$
3. Jika himpunan $A = \{a, h, l, i\}$ dan $B = \{k, o, m, p, u, t, e, r\}$
4. Jika himpunan $A = \{s, m, p\}$ dan $B = \{c, e, r, i, a\}$

4 Korespondensi Satu-Satu

Pada kompetisi Liga Indonesia 2007 yang lalu, setiap kesebelasan mempunyai seorang pelatih dan setiap pelatih hanya menangani sebuah kesebelasan. Misalkan *Persib Bandung* dilatih oleh **Arcan Iurie**, *Sriwijaya FC* dilatih oleh **Rahmad Darmawan**, *Persita Tangerang* dilatih oleh **Benny Dollo,** *Pelita Jaya Purwakarta* dilatih oleh **Fandi Ahmad**, dan *Deltras Sidoarjo* dilatih oleh **Jaya Hartono**.

A

B

Arcan Iurie
Rahmad Darmawan
Benny Dollo
Fandi Ahmad
Jaya Hartono

Math Info

Salah satu tokoh ajaib dalam matematika adalah Carl Friedrich Gauss. Pada saat usianya belum mengin-jak tiga tahun, Gauss balita telah mengore-ksi daftar gaji tukang batu milik ayahnya. Kejeniusan Gauss juga tampak ketika ia berusia 10 tahun. Ketika gurunya meminta murid-murid untuk menjum-lahkan angka dari 1 hingga 100, Gauss segera mencoretkan 5050 di atas batu tulisnya. (***Sumber: Encarta***)

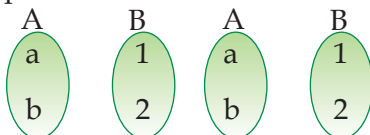
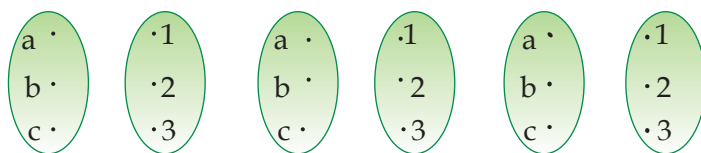
Seorang pelatih dalam sebuah kompetisi tidak mungkin melatih dua kesebelasan sekaligus. Begitu juga sebaliknya, sebuah kesebelasan tidak mungkin dilatih oleh pelatih lain yang juga melatih kesebelasan peserta lainnya. Dalam diagram panah tersebut terlihat bahwa setiap anggota dari himpunan *B* adalah peta dari himpunan *A*. Oleh karena itu, himpunan *B* adalah daerah kawan sekaligus daerah hasil. Pemetaan seperti ini disebut *korespondensi satu-satu*.

Dua buah himpunan *A* dan *B* disebut ber-korespondensi satu-satu jika setiap anggota *A* berpasangan dengan tepat satu anggota *B* dan setiap anggota *B* berpasangan dengan tepat satu anggota *A*. Pada korespondensi satu-satu, jumlah anggota himpunan *A* dan *B* haruslah sama.

Bagaimana menentukan banyaknya korespondensi satu-satu dari dua buah himpunan? Coba perhatikan penjelasan berikut.

- A: a B: ·1 — Misal himpunan $A = \{a\}$ dan $B = \{1\}$. Banyaknya korespondensi satu-satu dari *A* ke *B* adalah 1.
- Misal himpunan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{1, 2\}$. Banyaknya korespondensi satu-satu dari *A* ke *B* adalah 2.

- Misalkan himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$. Banyaknya korespondensi satu-satu dari *A* ke *B* adalah 6.

A: a·, b·, c· B: ·1, ·2, ·3 A: a·, b·, c· B: ·1, ·2, ·3 A: a·, b·, c· B: ·1, ·2, ·3

Jika kalian perhatikan ternyata banyaknya korespondensi satu-satu dari A ke B berkaitan erat dengan banyaknya anggota dari masing-masing himpunan itu. Perhatikan tabel berikut ini!

Banyaknya anggota himpunan *A* (*n*(*A*))	**Banyaknya anggota himpunan *B* (*n*(*B*))**	**Banyaknya korespondensi satu-satu**
1	1	1
2	2	$2 = 1 \times 2$
3	3	$6 = 1 \times 2 \times 3$
4	4	$24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$
n	n	$1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

Jadi, banyaknya korespondensi satu-satu dari A ke B jika $n(A) = n(B) = n$ adalah $1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$ atau $n!$.

C Menyelesaikan Soal Cerita yang Berhubungan dengan Relasi dan Pemetaan

Dalam kehidupan sehari-hari kalian dapat menemukan permasalahan yang berhubungan dengan relasi atau pemetaan. Perhatikan contoh permasalahan berikut ini!

Contoh

Toko elektronik "Purnama" menggunakan huruf sandi sebagai harga terendah yang dijual pada setiap barangnya. Hal ini bertujuan agar ia mendapatkan keuntungan pada saat tawar menawar harga dengan pembeli di tokonya. Ia menggunakan sandi memanfaatkan korespondesi satu-satu sebagai berikut!

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Jika pada sebuah barang tertulis "DELIA", tentukanlah harga terendah dari barang tersebut!

Penyelesaian:

D	E	L	I	A
↕	↕	↕	↕	↕
4	5	12	9	1

Jadi, harga terendah barang tersebut adalah Rp 451.291,00.

Latihan Soal

1. Harga 3 buah pensil adalah Rp 2.250,00. Jika Andi membeli 4 pensil harganya adalah Rp 3.000,00. Tentukanlah harga 5 buah pensil dengan menggunakan konsep korespondensi satu-satu!
2. Toko elektronik "Setya" menggunakan huruf sandi sebagai harga terendah pada setiap barangnya. Sandi yang digunakan adalah:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

   a. Jika pada sebuah barang tertulis "CAHIL" tentukanlah harga terendah barang tersebut!
   b. Tentukanlah harga terendah barang jika pada sebuah barang tertulis kata "BELAI"!
   c. Tentukanlah harga terendah barang jika pada sebuah barang tertulis kata "BADAK"!
3. Sebuah persegi panjang mempunyai keliling 30 cm. Nyatakanlah luas persegi panjang tersebut sebagai sebuah fungsi!

D Nilai Fungsi

Setelah kita mempelajari pengertian dan penyajian fungsi, sekarang kita akan menghitung nilai dari suatu fungsi.

1 Menghitung Nilai Suatu Fungsi

Setiap nilai yang berada dalam daerah asal jika dimasukkan ke dalam sebuah fungsi f maka akan diperoleh nilai fungsi yang merupakan daerah hasilnya. Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Sebuah fungsi f dari himpunan A ke B adalah sebagai berikut!

$f(x) = 3x - 4$, $x \in A$. Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$, tentukanlah

a. $f(2)$ b. $f(4)$

Penyelesaian:

a. $f(2) = 3(2) - 4 = 6 - 4 = 2$

b. $f(4) = 3(4) - 4 = 12 - 4 = 8$

Latihan Soal

1. Jika $f(x) = 2x - 5$, tentukanlah nilai fungsi berikut ini!
   a. $f(-3)$ c. $f(2)$
   b. $f(-5)$ d. $f(7)$
2. Jika $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, tentukanlah nilai fungsi berikut ini!
   a. $f(-5)$ c. $f(2)$
   b. $f(3)$ d. $f(8)$
3. Diketahui fungsi $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 ; x \leq 2 \\ 2x - 3 ; x > 2 \end{cases}$

   Tentukanlah nilai fungsi berikut ini!
   a. $f(-4)$ c. $f(2)$
   b. $f(0)$ d. $f(4)$
4. Jika $f(x) = -3x^2 + 2x - 7$, tentukanlah nilai fungsi berikut ini!

2 Menyusun Tabel Fungsi

Pada dasarnya menyusun tabel sebuah fungsi sama seperti mencari himpunan pasangan terurut dari sebuah fungsi yang diketahui daerah asalnya. Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Buatlah tabel fungsi $f(x) = -2x + 5$, jika diketahui daerah asalnya {-2, -1, 0, 1, 2}!

Penyelesaian:

$f(-2) = -2(-2) + 5 = 9;$
$f(-1) = -2(-1) + 5 = 7;$
$f(0) = -2(0) + 5 = 5;$
$f(1) = -2(1) + 5 = 3;$
$f(2) = -2(2) + 5 = 1.$

Tabel fungsi:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	7	5	3	1

Latihan Soal

1. Buat tabel fungsi $f(x) = 3x - 5$, jika diketahui daerah asalnya {-3, -1, 1, 3, 5}!
2. Buat tabel fungsi $f(x) = -2x - 1$, jika diketahui daerah asalnya {2, 3, 5, 7, 11}!
3. Buat tabel fungsi $f(x) = x^2 - 5$, jika diketahui daerah asalnya {1, 2, 3, 4, 5}!
4. Buat tabel fungsi $f(x) = 2x^2 - 3$, jika diketahui daerah asalnya {-4, -3, -2, -1}!
5. Buat tabel fungsi $f(x) = -4x^2 + 6$, jika diketahui daerah asalnya {4, 3, 2, 1, 0}!
6. Buat tabel fungsi $f(x) = \frac{3}{x+2}$, jika diketahui daerah asalnya {0, 1, 2, 3, 4}!
7. Buat tabel fungsi $f(x) = \frac{-x^2}{x+2}$, jika diketahui daerah asalnya {2, 4, 6, 8, 10}!

3 Menggambar grafik fungsi

Nilai suatu fungsi dapat kita gambarkan dalam sebuah grafik. Untuk menggambar grafik fungsi, agar lebih mudah kalian harus membuat tabel fungsinya terlebih dahulu. Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

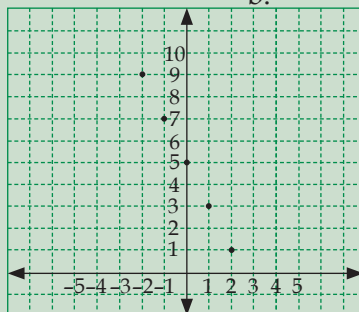
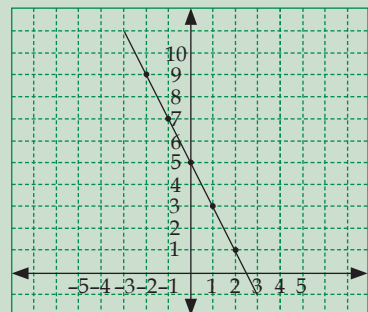
Gambarkan grafik fungsi $f(x) = -2x + 5$, jika diketahui:

a. Daerah asalnya {-2, -1, 0, 1, 2}!
b. Daerah asalnya bilangan real

Penyelesaian:

$f(-2) = -2(-2) + 5 = 9$; $f(-1) = -2(-1) + 5 = 7$;
$f(0) = -2(0) + 5 = 5$; $f(1) = -2(1) + 5 = 3$; $f(2) = -2(2) + 5 = 1$

Tabel fungsi:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	7	5	3	1

a. b.

Latihan Soal

1. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = -2x - 1$, jika diketahui:
   a. Daerah asalnya {-4, -3, -2, -1}
   b. Daerah asalnya bilangan real
2. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = -2x^2 - 3$, jika diketahui:
   a. Daerah asalnya {-2, -1, 0, 1, 2}
   b. Daerah asalnya bilangan real
3. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = -x^2 + 5$, jika diketahui:
   a. Daerah asalnya {0, 1, 2, 3, 4}
   b. Daerah asalnya bilangan real
4. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = \frac{3}{x+2}$, jika diketahui:
   a. Daerah asalnya {1, 2, 3, 4, 5}
   b. Daerah asalnya bilangan real
5. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = -2x^3 - 2$, jika daerah asalnya bilangan real!

E Menentukan Nilai Perubahan Fungsi jika Variabel Berubah

Jika diketahui suatu fungsi berbentuk $f(x) = 5x - 6$, kalian tentu dapat menentukan nilai $f(2)$, $f(3)$, dan nilai x yang lainnya?. Lalu bagaimana jika yang ingin dicari adalah nilai dari $f(x + 1)$, dapatkah kalian menentukan nilainya?

Contoh

Misalkan fungsi $f(x) = 2x - 1$, tentukanlah:

a. $f(x + 1)$ b. $f(x^2)$

Penyelesaian:

a. $f(x + 1) = 2(x + 1) - 1 = 2x + 2 - 1 = 2x + 1$

b. $f(x^2) = 2x^2 - 1$

Latihan Soal

1. Misalkan fungsi $f(x) = 1 - 2x$, tentukanlah:
   a. $f(x - 3)$ b. $f(-x + 1)$
2. Misalkan fungsi $f(x) = -3x + 2$, tentukanlah:
   a. $f(x + 2)$ b. $f(1 - x^2)$

3. Misalkan fungsi $f(x) = x^2 - 1$, tentukanlah:
   a. $f(x + 1)$
   b. $f(-x)$
4. Misalkan fungsi $f(x) = 2x^2 - 1$. Jika diketahui $f(x + 1) = f(x - 1)$, tentukanlah nilai x!
5. Misalkan fungsi $f(x) = -4x^2 + 2$. Jika diketahui $f(x + 2) = f(x - 2)$, tentukanlah nilai x!

Otak-Atik Matematika

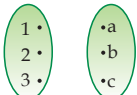
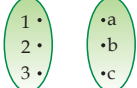
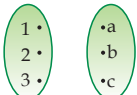
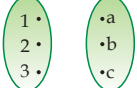
Sebuah kelompok belajar terdiri atas empat orang anak,yaitu Aam, Ilham, Trisno, dan Hari. Trisno dan Hari berbadan tinggi, anak yang lain tidak. Aam dan Trisno berkulit sawo matang yang lain tidak. Aam dan Ilham berambut ikal, anak yang lain tidak. Dapatkah kamu menentukan siapa yang tidak tinggi, berkulit kuning, dan berambut ikal?

Petunjuk:

Buatlah diagram panah yang menghubungkan setiap anak dengan sifatnya!

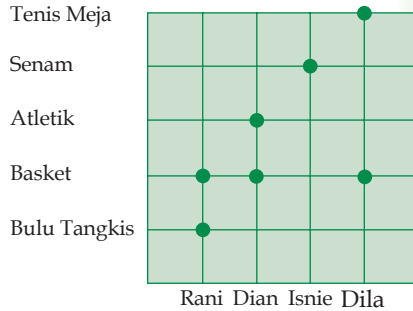
Rangkuman

1. Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah hubungan yang memasangkan anggota himpunan A dengan anggota himpunan B.
2. Pemetaan atau fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.
3. Relasi himpunan atau fungsi dapat dinyatakan dengan diagram panah, diagram kartesius, dan himpunan pasangan terurut.
4. Jika banyaknya anggota himpunan $A = m$ dan banyak anggota himpunan $B = n$ maka banyaknya pemetaan dari A ke B sama dengan n^m.
5. Dua buah himpunan A dan B disebut berkorespondensi satu-satu jika setiap anggota A berpasangan dengan tepat satu anggota B, dan setiap anggota B berpasangan dengan tepat satu anggota B, sehingga $n(A) = n(B)$.
6. Banyaknya korespondensi satu-satu dari A ke B jika $n(A) = n(B) = n$ adalah $n!$

Uji Kemampuan

A. Pilihlah satu jawaban yang paling tepat, a, b, c, atau d! Tuliskan pada lembar jawabanmu!

1. Himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$. Relasi yang menghubungkan himpunan B ke A adalah ....
   a. kuadrat dari
   b. akar dari
   c. faktor dari
   d. kelipatan dari

2. Sebuah relasi dari dua himpunan dapat disajikan dengan beberapa cara berikut ini, *kecuali* ....
   a. diagram panah
   b. diagram kartesius
   c. diagram garis
   d. himpunan pasangan terurut

3. Perhatikan diagram kartesius di samping! Siswa yang menyukai olahraga basket dan atletik adalah ....
   a. Rani
   b. Dian
   c. Isnie
   d. Dila

4. Jika $A = \{p, u, n, k\}$ dan $B = \{1, 2\}$ maka himpunan $A \times B$ = ...
   a. $\{(p, 1), (u, 1), (n, 1), (k, 1)\}$
   b. $\{(p, 1), (u, 1), (n, 1), (k, 1), (p, 2), (u, 2), (n, 2), (k, 2)\}$
   c. $\{(p, 2), (u, 2), (n, 2), (k, 2)\}$
   d. $\{(p, 1), (u, 1), (n, 1), (k, 1), (p, 2), (u, 2), (n, 2)\}$

5. Banyaknya himpunan $P \times Q$ jika diketahui $P = \{1, 3, 5\}$ dan $Q = \{s, e, t, y, a\}$ adalah ....
   a. 6
   b. 18
   c. 24
   d. 15

6. Banyaknya himpunan $A \times B$ adalah 28. Jika diketahui himpunan $A = \{l, o, v, e\}$ maka banyaknya anggota himpunan B adalah ....
   a. 3
   b. 4
   c. 5
   d. 7

7. Diagram panah berikut yang menyatakan fungsi dari P ke Q adalah ....
   a. 1 • 2 • 3 •   •a •b •c
   b. 1 • 2 • 3 •   •a •b •c
   c. 1 • 2 • 3 •   •a •b •c
   d. 1 • 2 • 3 •   •a •b •c

8. Himpunan pasangan berurutan berikut yang merupakan pemetaan atau fungsi adalah ....
   a. {(b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4)}
   b. {(4, 1), (3, 1), (1, 1), (3, 0)}
   c. {(1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1)}
   d. {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

9. Perhatikan diagram panah di samping!
   Kodomain dari pemetaan tersebut adalah ....
   a. {Aam, Trisno, Ilham, Lisda, Dewi}
   b. {6, 7, 8, 9, 10}
   c. {7, 8, 9, 10}
   d. {6, 7, 8, 9,}

10. Diketahui himpunan pasangan berurutan dari suatu pemetaan adalah {(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)}. Range dari pemetaan tersebut adalah ....
    a. {1, 2, 3, 4}
    b. {1, 5, 4, 6}
    c. {2, 4, 5, 6}
    d. {3, 4, 5, 6}

11. Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dengan aturan $-3x + 2, x \in A$. Jika diketahui A = {2, 3, 5, 7}, maka daerah hasilnya adalah ....
    a. {-4, -7, -13, -19}
    b. {-4, -7, -12, -19}
    c. {-4, -5, -13, -19}
    d. {-4, -7, -13, -18}

12. Misal himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Banyaknya korespondensi satu-satu yang mungkin dari himpunan A ke B adalah ....
    a. 6
    b. 12
    c. 24
    d. 36

13. Jika $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, nilai dari $f(-2)$ adalah ....
    a. 2
    b. 6
    c. 12
    d. 15

14. Jika fungsi $f(x) = 2x^2 - 1$ maka $f(x - 1)$ adalah .....
    a. $2x^2 + 1$
    b. $2x^2 + 3$
    c. $2x^2 - 4x + 1$
    d. $2x^2 + 4x - 1$

15. Diketahui $f(x) = a\sqrt{x} + 7$ dan $f(4) = -3$. Nilai dari $f(9)$ adalah ....
    a. 8
    b. 5
    c. 0
    d. -8

16. Diketahui himpunan pasangan berurutan dari suatu pemetaan adalah {(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)}. Range dari pemetaan tersebut adalah ....
    a. {1, 2, 3, 4}
    b. {1, 5, 7, 9}
    c. {3, 5, 7, 9}
    d. {1, 3, 5, 7}

17. Misal himpunan $A = \{p, e, l, i, t, a\}$ dan banyak himpunan $A \times B$ adalah 48. Banyak anggota himpunan B adalah ....

    a. 8
    b. 7
    c. 6
    d. 5

18. Dari pernyataan-pernyataan berikut, manakah yang termasuk ke dalam bentuk korespondensi satu-satu.
    (i) Nama presiden dengan negara yang dipimpinnya
    (ii) Lagu kebangsaan dengan negaranya
    (iii) Negara dengan ibukota negaranya

    a. (i), (ii)
    b. (i), (iii)
    c. (ii), (iii)
    d. (i), (ii), (iii)

19. Suatu pemetaan dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan {(0, 0), (1, 3), (2, 8), (3, 15)}. Aturan pemetaan dari himpunan tersebut adalah ....

    a. $x^2 + 2$
    b. x^3
    c. $x^2 + 2x$
    d. $x^2 + 2x - 2$

20. Diketahui himpunan pasangan berurutan dari suatu pemetaan adalah {(1, 0), (2, 5), (3, 12), (4, 21)}. Aturan pemetaan dari himpunan tersebut adalah ....

    a. $x^2 + 2$
    b. $x^2 + 2x - 2$
    c. $x^2 + 2x$
    d. $x^2 + 2x - 3$

B. Selesaikan soal-soal berikut ini!

1. Diketahui himpunan $P = \{0, 1, 2, 3\}$ dan $Q = \{0, 1, 4, 8, 18, 27\}$. Tentukan:
    a. Himpunan pasangan berurutan dari Q ke P yang menyatakan relasi "pangkat tiga dari"
    b. Buat diagram panah untuk relasi tersebut!
    c. Buat diagram kartesius untuk relasi tersebut!

2. Misal $A = \{2, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{-17, -11, -7, -5, -3, -2\}$. Jika fungsi f dari A ke B adalah $f: x \to -3x + 4$, $x \in A$, nyatakan fungsi f dalam:
    a. Diagram panah
    b. Diagram kartesius
    c. Himpunan pasangan terurut

3. Tentukanlah himpunan $A \times B$ jika diketahui:
    a. $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$
    b. $A = \{s, e, k, o, l, a, h\}$ dan $B = \{m, u, s, i, k\}$
    c. $A = \{c, i, n, t, a\}$ dan $B = \{2, 3, 5\}$

4. Suatu fungsi f dari himpunan P ke himpunan Q dengan aturan $2x - 2$, $x \in P$. Jika diketahui $P = \{2, 3, 5, 7\}$ dan $Q = \{1, 2, 3, ..., 12\}$. Tentukan:
    a. Himpunan pasangan terurut dalam f
    b. Daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari f

5. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = -\frac{1}{x+2}$, jika diketahui:
   a. Daerah asalnya {0, 2, 4, 8}
   b. Daerah asalnya bilangan real
6. Diketahui domain suatu fungsi adalah {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

   Jika $f(x) = 0$ untuk $x = 0$, $f(x) = x^2 + 1$ untuk x ganjil, dan $f(x) = x^2 - 1$ untuk x genap, tentukan:
   a. Himpunan pasangan berurutan
   b. Diagram panah
   c. Diagram kartesius

KUNCI JAWABAN BAB 1

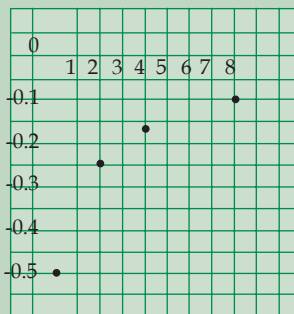
A. Pilihan Ganda

1. a
3. b
5. d
7. c
9. b
11. a
13. d
15. d
17. a
19. c

B. **Uraian**

1. a. {(0, 0), (1, 1), (8, 2), (27, 3)}
3. a. {(*a*, 1), (*a*, 2), (*a*, 3), (*a*, 4), (*b*, 1), (*b*, 2), (*b*, 3), (*b*, 4), (*c*, 1), (*c*, 2), (*c*, 3), (*c*, 4),}
   c. {(*c*, 2), (*c*, 3), (*c*, 5), (*i*, 2), (*i*, 3), (*i*, 5), (*n*, 2), (*n*, 3), (*n*, 5), (*t*, 2), (*t*, 3), (*t*, 5), (*a*, 2), (*a*, 3), (*a*, 5)}
5. a.

x	0	2	4	8
$f(x)$	-1/2	-1/4	-1/6	-1/10

Bab

Persamaan Garis Lurus

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini siswa diharapkan mampu:

- **Mengenal persamaan garis lurus dalam berbagai bentuk dan variabel;**
- **Menggambar grafik pada bidang kartesius;**
- **Mengenal pengertian garis lurus dan gradien;**
- **Menentukan gradien garis lurus serta persamaan garisnya;**
- **Menentukan koordinat titik potong dua buah garis;**
- **Menggunakan konsep persamaan garis dalam kehidupan sehari-hari.**

Dalam melakukan sebuah pendakian, para pendaki pasti akan melewati berbagai jenis jalanan. Adakalanya mereka menemui jalan yang lurus, terjal dan berkelok-kelok. Tidak jarang mereka pun menghadapi jalan yang curam dan menanjak dengan kemiringan tertentu.

Kemiringan suatu jalanan dapat dilukiskan dalam sebuah garis. Kemiringan suatu garis dalam matematika dikenal dengan istilah gradien.

Peta konsep

Persamaan garis lurus
A. Persamaan garis
1. Sistem koordinat kartesius
2. Pengertian persamaan garis
3. Menggambar garis lurus pada bidang kartesius
4. Menentukan persamaan garis yang digambar pada bidang kartesius
B. Gradien
1. Gradien garis yang melalui titik pusat (0, 0) dan titik (x, y)
2. Gradien garis yang melalui dua buah titik (x1,y1) dan (x2,y2)
3. Gradien garis yang sejajar sumbu x dan sumbu y
4. Gradien garis yang saling sejajar
5. Gradien garis yang saling tegak lurus
C. Menentukan persamaan garis
1. Menentukan persamaan garis yang melalui sebuah titik (a, b) dengan gradien m
2. Menentukan persamaan garis yang melalui titik (x1, y1) dan (x2, y2)
3. Menentukan persamaan garis yang sejajar dengan garis lain dan melalui sebuah titik
4. Menentukan persamaan garis yang tegak lurus dengan garis lain dan melalui sebuah titik
D. Titik potong dua buah garis
E. Penerapan konsep persamaan garis lurus dalam kehidupan

Persamaan aris

Pada saat duduk di bangku sekolah dasar, kalian pernah mempelajari sistem koordinat kartesius, bukan? Coba kalian ingat-ingat kembali. Persamaan garis yang akan kita bahas kali ini juga disajikan dalam sistem koordinat kartesius.

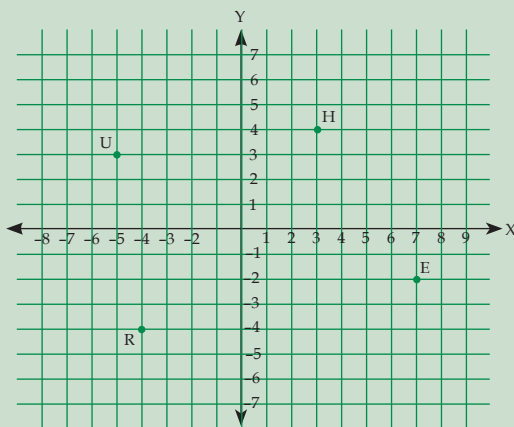
Sistem Koordinat Kartesius

Untuk menentukan letak suatu benda yang berada di ruangan tertentu kita menggunakan sebuah koordinat. Pada koordinat kartesius terdapat dua buah garis yang menjadi acuan dalam menentukan posisi atau letak suatu titik. Kedua garis ini saling tegak lurus dan berpotongan di titik pusat (0,0). Garis-garis yang saling tegak lurus ini untuk selanjutnya disebut sebagai sumbu koordinat. Letak sebuah titik pada sistem koordinat kartesius ditentukan oleh pasangan absis x dan ordinat y.

Tokoh

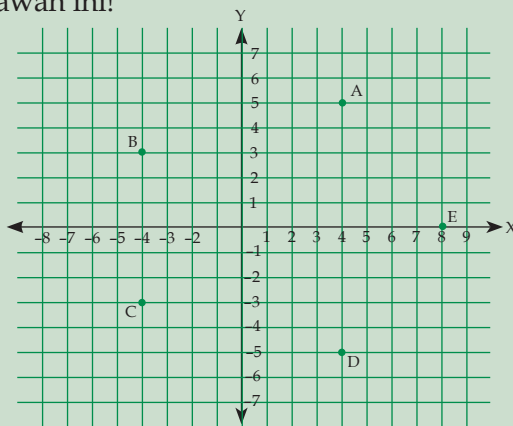
Rene Descartes yang dikenal sebagai *Cartesius* merupakan seorang filsuf dan matematikawan berkebangsaan Prancis. Ia merupakan pencipta sistem koordinat kartesius yang mempengaruhi perkembangan kalkulus modern. (*Sumber: Encarta*)

Contoh

Tentukanlah letak titik *H, E, R,* dan *U* pada sistem koordinat berikut!

Penyelesaian:

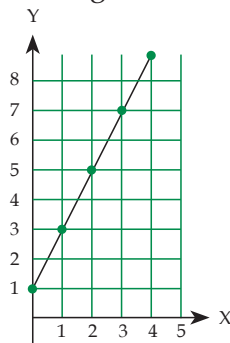
$H = (3, 4)$; $E = (7, -2)$; $R = (-4, -4)$; $U = (-5, 3)$

Latihan Soal

1. Tentukanlah koordinat titik A, B, C, D, dan E pada sistem koordinat kartesius di bawah ini!

2. Gambarkan koordinat titik-titik $O(2, -3)$, $T(-5, 4)$, $I(6, 4)$, dan $X(-5, -2)$ pada sistem koordinat kartesius!

2 Pengertian Persamaan Garis

Jika diketahui sebuah pemetaan $f(x) = 2x + 1$ dengan daerah asal $0 \leq x \leq 5$ dengan $x \in R$, maka kalian dapat menggambarkan grafik fungsinya seperti gambar di samping.

Dalam permasalahan tersebut, persamaan $f(x) = 2x + 1$ dapat kita ubah menjadi persamaan $y = 2x + 1$. Dalam grafik terlihat bahwa grafik fungsinya berupa garis lurus, mengapa demikian? Persamaan $y = 2x + 1$ disebut persamaan garis lurus atau persamaan garis. Secara umum bentuk persamaan garis adalah sebagai berikut.

$$px + qy = r \text{ dimana } p \neq 0 \text{ dan } q \neq 0$$

Jika masing masing ruas dari persamaan $px + qy = r$ kita bagi dengan q maka akan diperoleh persamaan garis berikut.

$$y = -\frac{p}{q}x + \frac{r}{q}$$

Bilangan di depan variabel x, yaitu $-\frac{p}{q}$ merupakan sebuah konstanta sehingga dapat kita ubah menjadi konstanta lain misalnya m, dan $\frac{r}{q}$ dapat kita ganti dengan c. Untuk selanjutnya

kita peroleh persamaan garis yang baru sebagai berikut.

$y = mx + c$, dengan m dan c adalah sebuah konstanta.

Contoh

Nyatakan persamaan garis berikut ke dalam bentuk $y = mx + c$!

a. $3x + 4y = 12$

b. $4x - 2y - 6 = 0$

Penyelesaian:

a. $3x + 4y = 12 \Leftrightarrow 4y = -3x + 12$

$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3$

b. $4x - 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow -2y = -4x + 6$

$\Leftrightarrow y = 2x - 3$

Latihan Soal

Nyatakan persamaan garis berikut ke dalam bentuk $y = mx + c$!

1. $2x - 5y = 7$
2. $5x + 3y = -15$
3. $-3x + 6y = 8$
4. $-5x + 4y = -10$
5. $4x + y = 12$
6. $12x + 3y = 5$
7. $x + 4y = 16$
8. $-6x - 3y = 12$
9. $6x + 3y - 12 = 0$
10. $-4x + 5y - 16 = 0$
11. $7x - 3y - 21 = 0$
12. $8x + 3y - 2x = 21$
13. $2x + y - 4y = 10$
14. $4x - 3y = 7x + 12$

3 Menggambar Garis Lurus Pada Bidang Kartesius

Untuk menggambar sebuah garis kalian cukup menentukan dua buah titik yang memenuhi persamaan garis yang diberikan. Untuk menggambar garis dengan persamaan $y = mx + c$, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

a. Tentukan dua buah titik yang memenuhi persamaan $y = mx + c$ dengan cara memasukkan nilai x pada persamaannya

b. Tarik garis lurus pada kedua titik tersebut

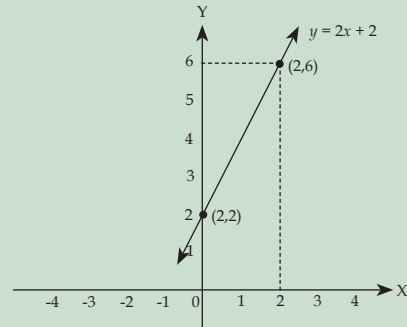
Perhatikan contoh berikut.

Contoh

Gambarkan grafik persamaan garis $y = 2x + 2$!

Penyelesaian:

x	0	2
y	2	6

Persamaan garis $y = 2x + 2$ akan melewati titik (0, 2) dan (2, 6).

Dari contoh di atas dapat dibuktikan bahwa hanya dengan dua buah titik kita dapat menggambar sebuah garis. Agar kalian lebih memahaminya, lakukan kegiatan berikut.

Tugas

Kerjakan pada buku latihanmu!

Lengkapilah titik-titik yang diberikan untuk menggambar grafik persamaan $y = 3x + 1$!

Cara I

x	0	1	2	3
y	1	...	...	...

Grafik $y = 3x + 1$ akan melewati titik (0, 1) , (1, ...), (2, ...), dan (3, ...). Gambarkan grafiknya dalam bidang kartesius!

Cara II

x	2	4
y	...	...

Grafik $y = 3x + 1$ akan melewati titik (2,...) dan (4,...). Gambarkan grafiknya!

Apakah grafik yang diperoleh pada cara I sama dengan grafik cara II? Apa yang dapat kamu simpulkan?

Latihan Soal

Gambarlah grafik garis lurus yang memenuhi persamaan berikut! Tentukan dua buah titik potongnya terlebih dahulu!

1. $y = x + 2$
2. $y = 2x - 1$
3. $y = 3x + 1$
4. $y = 4x$
5. $y = -x + 2$
6. $y = -2x - 2$
7. $6x + 3y - 21 = 0$
8. $x - 3y - 21 = 0$

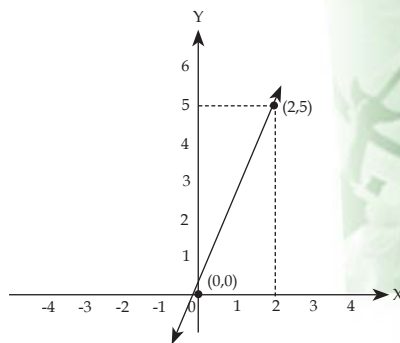
4 Menentukan Persamaan Garis yang Digambar Pada Bidang Kartesius

Tahukah kalian bagaimana menentukan persamaan garis apabila diketahui gambarnya pada bidang kartesius? Perhatikan gambar persaman garis di samping! Misalkan persamaan garis pada gambar di samping adalah $y = mx + c$. Kita dapat menentukan nilai m dan c karena terdapat dua buah titik yang dilewati oleh persamaan garis tersebut, yaitu titik (0,0) dan (2, 5).

Kedua titik tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan $y = mx + c$ sehingga diperoleh hasil sebagai berikut.

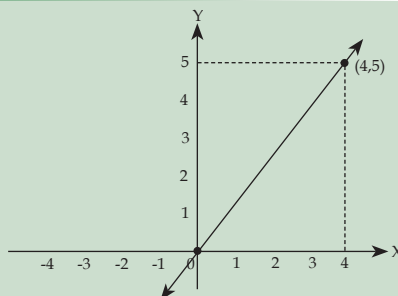
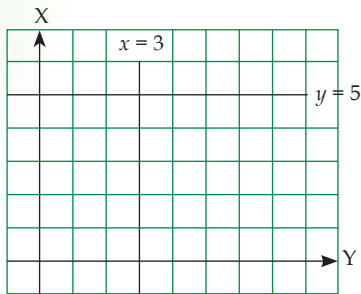
$(0, 0) \Leftrightarrow 0 = m(0) + c$
$\Leftrightarrow c = 0$

$(2, 5) \Leftrightarrow 5 = m(2) + c$
$\Leftrightarrow 5 = 2m + 0$
$\Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$

Jadi, persamaan garis pada gambar tersebut adalah $y = \frac{5}{2}x$. Dari permasalahan tersebut dapat ditarik kesimpulan bahwa persamaan garis yang melalui titik pusat (0,0) dan titik (a, b) dengan $a \neq 0$ adalah $y = \frac{b}{a}x$.

Contoh

Tentukan persamaan garis dari gambar di samping!

Penyelesaian:

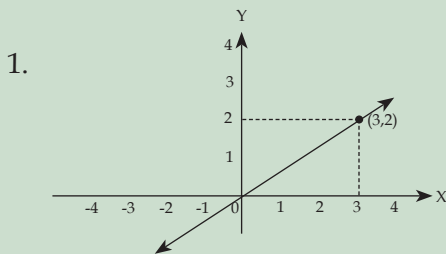
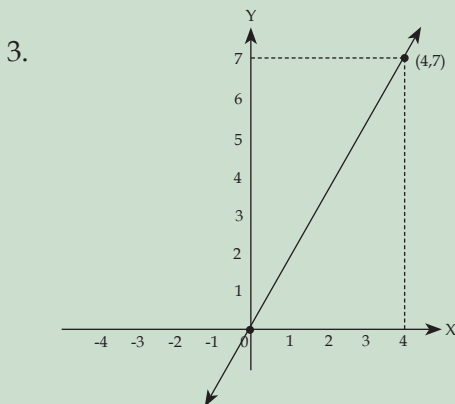
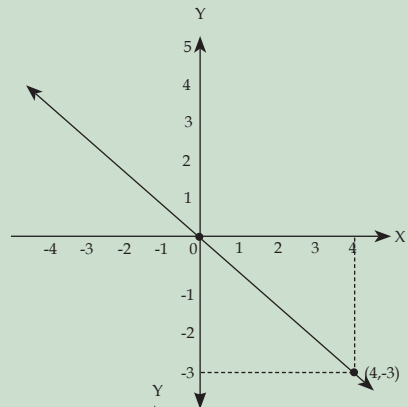
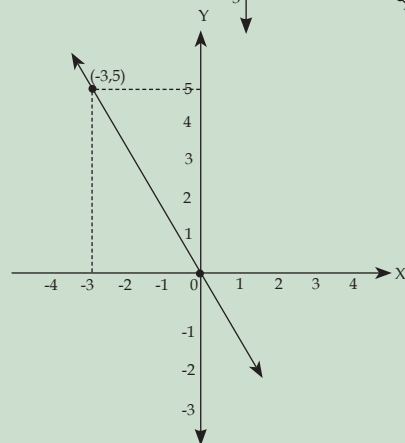
$a = 4$, dan $b = 5$. Persamaan garisnya adalah $y = \frac{5}{4}x$

Dalam kasus khusus, persamaan garis lurus yang sejajar dengan sumbu X memiliki bentuk $y = c$. Sedangkan persamaan garis yang sejajar sumbu Y memiliki bentuk $x = c$, dimana c adalah konstanta.

Latihan Soal

Tentukan bentuk persamaan garis pada soal-soal berikut!

1.

2.

3.

4.

B radien

Pernahkah kalian melewati jalan yang naik dan turun seperti halnya jalan-jalan di daerah pegunungan? Tahukah kalian bahwa dalam pembuatan jalan yang menanjak dan berkelok-kelok diperlukan perhitungan tertentu agar kendaraan

mudah melewatinya. Salah satu perhitungan matematika yang harus diperhatikan dalam pembangunan jalan seperti itu adalah kemiringannya.

Perhatikan gambar disamping! Untuk menjangkau dan memadamkan titik api yang menjadi penyebab kebakaran, para petugas pemadam kebakaran menggunakan tangga dengan kemiringan tertentu. Tahukah kalian mengapa tangga yang digunakan oleh pemadam kebakaran posisinya miring?

Jika kita menganggap tangga pada gambar tersebut adalah satu garis lurus maka garis tersebut memiliki kemiringan tertentu. Kemiringan ini dalam matematika dikenal dengan sebutan gradien. Jadi, gradien suatu garis adalah ukuran kemiringan atau kecondongan suatu garis. Selain itu gradien juga disebut sebagai koefisien arah pada suatu garis lurus dan dilambangkan dengan huruf m.

1 Gradien Garis yang Melalui Titik Pusat (0,0) dan Titik (x, y)

Kalian sudah mengetahui bahwa persamaan garis yang melalui titik pusat (0,0) dan titik (x, y) adalah $y = mx$. Perhatikan contoh berikut.

Contoh

Tentukanlah gradien persamaan garis yang melalui titik pusat dan titik (3, 5)!

Penyelesaian:

Persamaan garis yang melalui titik (0, 0) dan (3, 5) adalah $y = \frac{5}{3}x$. Sehingga gradiennya adalah $\frac{5}{3}$.

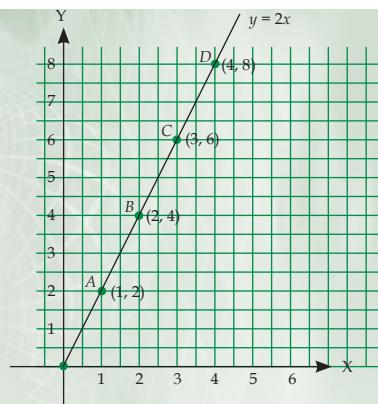
Sekarang kita akan menunjukkan bahwa gradien dari persaman garis $y = mx$ adalah m.

Tugas

Salin dan kerjakanlah pada buku latihanmu!

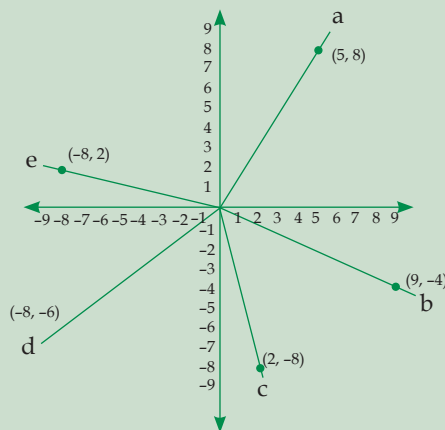
Perhatikan persamaan garis pada gambar berikut ini!

Bandingkan komponen x dengan komponen y ruas garis OA, OB, OC, dan OD pada garis $y = 2x$. Kemudian isilah datanya pada tabel berikut ini!

	Komponen x	Komponen y	$\frac{\text{Komponen } x}{\text{Komponen y}}$
OA	1	2	....
OB	...	...	...
OC	...	...	...
OD	...	...	...

Bagaimana nilai perbandingan antara komponen y dan komponen x pada setiap ruas garis? Bagaimana hubungannya dengan garis $y = 2x$? Kemukakan kesimpulanmu!

Berdasarkan kegiatan tersebut kalian akan menemukan kesimpulan bahwa perbandingan antara komponen y dengan komponen x pada setiap ruas garis adalah sama. Nilai perbandingan tersebut dinamakan gradien. Jadi, persamaan garis $y = mx$ memiliki gradien m dengan $m = \frac{y}{x}$.

Latihan Soal

1. Gambarkan garis yang melalui titik pusat (0,0) dan titik-titik berikut ini. Kemudian tentukanlah gradien garis tersebut!
   a. (3, 4)
   b. (-4, 8)
   c. (5, 7)
   d. (5, 7)
   e. (2, -5)
   f. (-3, -9)
2. Perhatikan gambar di samping ini! Tentukan:
   a. Persamaan garisnya!
   b. Gradien dari persamaan tersebut!

2 Gradien Garis yang Melalui Dua Buah Titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)

Tidak selamanya bahwa sebuah garis itu akan melewati titik pusat (0,0). Jika suatu garis tidak melewati titik pusat (0,0), dapatkah kalian menentukan gradiennya?

Contoh

Tentukanlah gradien persamaan garis yang melalui titik (6, 2) dan titik (3, 5)!

Penyelesaian:

$x_1 = 6;\ y_1 = 2;\ x_2 = 3;\ y_2 = 5$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{3-6} = \frac{3}{-3} = -1$$

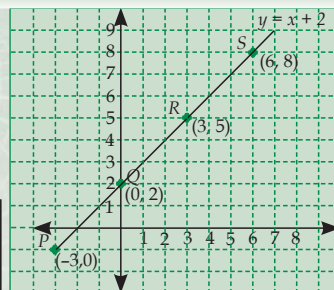
Jadi, gradien persamaan garisnya adalah -1.

Agar kalian lebih memahami bagaimana mencari gradien dari dua buah persamaan, lakukanlah kegiatan berikut.

Tugas

Kerjakan pada buku latihanmu.

Perhatikan persamaan garis pada gambar berikut.

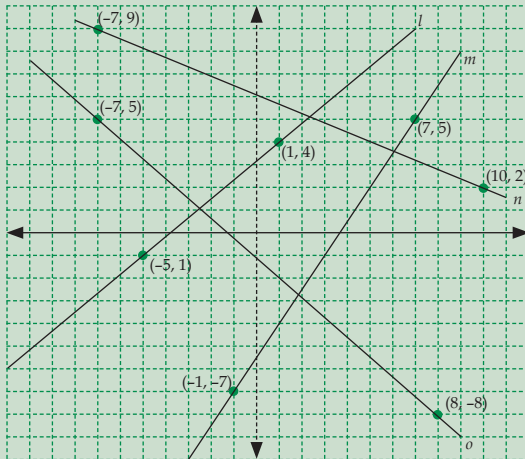
Bandingkan komponen x dengan komponen y ruas garis PQ, QR, dan RS pada garis $y = x + 2$. Isilah datanya pada tabel berikut!

	Komponen x	Komponen y	$\frac{\text{Komponen } y}{\text{Komponen } x}$
PQ	$x_Q - x_P = 3$	$y_Q - y_P = 3$	1
QR	$x_R - x_Q = ...$	$y_R - y_Q = ...$	...
RS	$x_S - x_R = ...$	$y_S - y_R = ...$	...

Bagaimana nilai perbandingan antara komponen y dan komponen x pada setiap ruas garis? Bagaimana hubungannya dengan garis $y = x + 2$? Kemukakan kesimpulanmu!

Berdasarkan hasil kegiatan di atas, diperoleh kesimpulan bahwa perbandingan komponen x dan komponen y pada setiap ruas garis adalah sama, yaitu 1. Bilangan 1 ini merupakan gradien dari persamaan garis $y = x + 2$. Jadi, persaman garis $y = mx$, $c \neq 0$ memiliki gradien m dengan $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Latihan Soal

1. Gambarkan garis yang melalui titik-titik berikut ini. Kemudian tentukan gradien dari garis tersebut!
   a. (2, 4) dan (5, 8)
   b. (1, 3) dan (6, 2)
   c. (-1, 3) dan (3, -5)
   d. (-5, 4) dan (1, -2)

2. Perhatikan gambar berikut ini!

Tentukan gradien garis l, m, n, dan o!

3 Gradien Garis Yang Sejajar Sumbu-*x* dan Sumbu-*y*

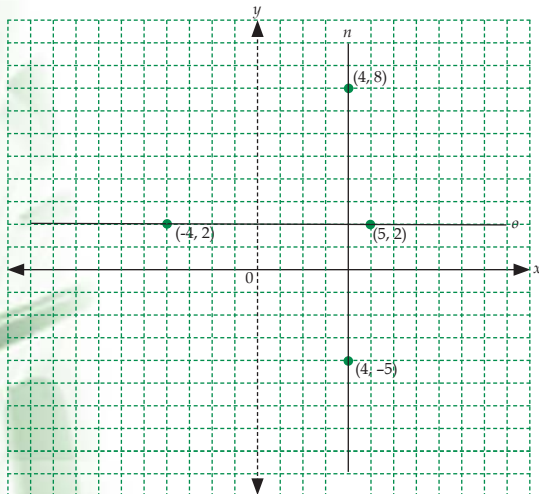
Untuk menentukan gradien garis yang sejajar sumbu-x dan gradien garis yang sejajar sumbu-y kita dapat menggunakan rumus $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Perhatikan gambar di samping!

Garis o sejajar dengan sumbu-x sedangkan garis n sejajar dengan sumbu-y. Pada gambar terlihat dengan jelas bahwa garis o melewati titik (-4, 2) dan (5, 2). Gradien garis o adalah

$$m = \frac{2 - 2}{5 - (-4)} = \frac{0}{9} = 0.$$

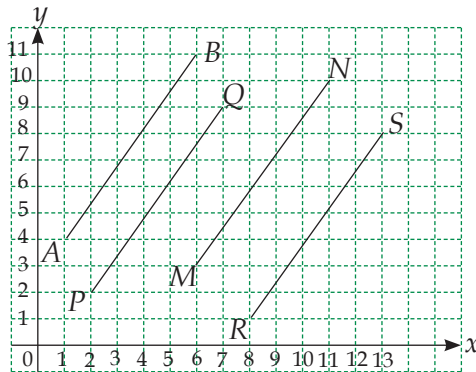
Jadi, gradien garis yang sejajar sumbu-x adalah 0.

Perhatikan garis n di samping! Garis n melewati titik (4, 8) dan (4, -5). Gradien garis n adalah $m = \frac{-5 - 8}{4 - 4} = \frac{13}{0}$ = (tidak didefinisikan).

Jadi, gradien garis yang sejajar sumbu-y tidak didefinisikan.

Math Info

Bilangan nol yang kita kenal sekarang ini memiliki perjalanan yang cukup panjang. Perjalanan ini bisa kita telusuri dari asal katanya. Dalam bahasa Inggris, bilangan nol disebut zero. Kata zero ini berasal dari bahasa Italia, zefiro yang diserap dari bahasa Arab, safira yang berarti kosong.

Gradien Garis Yang Saling Sejajar

Gradien garis yang sejajar sumbu-x adalah 0. Bagaimana dengan gradien dua buah garis yang saling sejajar seperti terlihat pada gambar berikut? Perhatikan gambar di bawah ini kemudian lakukan kegiatan di bawah ini untuk mencari gradien garis yang saling sejajar. Apa yang dapat kalian simpulkan berdasarkan kegiatan tersebut?

Tugas

Salin dan kerjakan di buku latihan kalian!

Carilah gradien ruas garis *AB, PQ, MN*, dan *RS* pada gambar di atas dengan melengkapi titik-titik berikut ini!

- Titik *A* (1, 4) ; B (6, 11)

  Gradien $AB = \dfrac{11 - 4}{6 - 1} = \dfrac{7}{5}$

- Titik *P* (2,2) ; *Q* (7,9)

  Gradien $PQ = \dfrac{\ldots - 2}{7 - \ldots} = \dfrac{7}{5}$

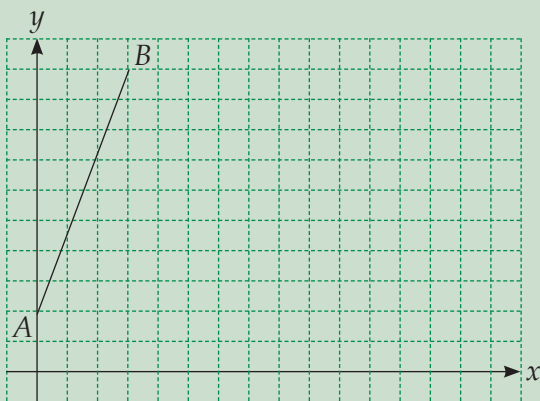
- Titik *M* (...,...); *N* (...,...)

  Gradien $MN = \dfrac{10 - 3}{11 - 6} = \dfrac{\ldots}{\ldots}$

- Titik *R* (1,4); *S* (6,11)

  Gradien $RS = \dfrac{\ldots - \ldots}{\ldots - \ldots} = \dfrac{7}{5}$

Jadi gradien garis $AB = PQ = MN = RS = \dfrac{7}{5}$.

Latihan Soal

Buatlah 5 buah garis (beserta koordinatnya) yang sejajar dengan garis *AB* pada bidang koordinat di samping, kemudian tunjukkan bahwa gradien dari masing-masing garis yang kalian buat adalah sama!

5 Gradien Garis yang Saling Tegak Lurus

Selain kedudukan dua buah garis yang sejajar, terdapat pula kedudukan dua buah garis yang saling tegak lurus. Bagaimana gradien garis yang saling tegak lurus? Apakah gradiennya sama? Perhatikan contoh berikut.

Contoh

Garis k memiliki persamaan $y = 2x + 5$. Jika garis l tegak lurus garis k tentukanlah gradien garis l!

Penyelesaian:

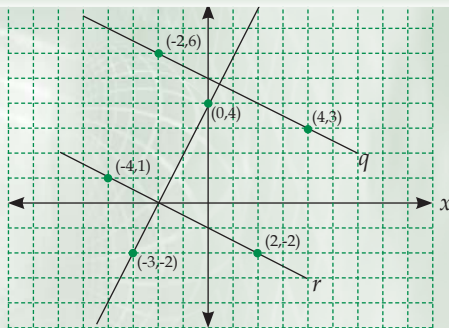
$$m_l = 2\ ;\ m_k \times m_l = -1 \Rightarrow m_l = -\frac{1}{m_k} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Jadi, gradien garis l adalah $-\frac{1}{2}$.

Tugas

Perhatikan gambar berikut!

Garis p tegak lurus garis q dan garis r. Lengkapilah tabel berikut!

Garis	Gradien
p	$m_p = \frac{2-2}{5-(-4)} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

q	$m_q = \dfrac{6 - \ldots}{-2 - \ldots} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \ldots$
r	$m_r = \dfrac{1 - \ldots}{-4 - \ldots} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \ldots$

$m_p \times m_q = \ldots \times \ldots = \ldots$

$m_p \times m_r = \ldots \times \ldots = \ldots$

Apa yang dapat kalian simpulkan tentang dua buah garis yang saling tegak lurus? Bagaimana perkalian gradien dari garis-garis tersebut?

Gradien dua buah garis yang saling tegak lurus apabila dikalikan hasilnya sama dengan –1. Kalian sudah buktikan hal ini dalam kegiatan di atas. Jadi, jika l adalah sebuah garis yang tegak lurus dengan garis p maka berlaku $m_l \times m_p = -1$.

Latihan Soal

1. Persamaan garis g adalah $y = 5x - 2$. Jika garis h diketahui tegak lurus garis g, tentukan gradien garis h!
2. Garis l tegak lurus garis m. Jika persamaan garis l adalah $y = \frac{3}{5}x + 2$, tentukan gradien garis m!
3. Garis p melalui titik (4, -5) dan (2, -3). Jika garis q tegak lurus garis p, tentukan gradien garis q!
4. Garis a berpotongan tegak lurus dengan garis b pada titik (2, 4). Jika garis a melalui titik (-5, -2), tentukan gradien garis b!
5. Garis k melalui titik (-2, 5) dan (2, 4). Jika garis k tegak lurus garis l, tentukan gradien garis l!

C Menentukan Persamaan aris

Jika diketahui gradien sebuah garis yang melalui suatu titik tertentu, dapatkah kalian menentukan persamaan garisnya? Atau dapatkah kalian menentukan gradien sebuah garis jika yang diketahui hanya dua buah titik yang dilalui oleh garis tersebut?

1 Menentukan Persamaan Garis yang Melalui Sebuah Titik (*a*,*b*) dengan Gradien *m*

Kalian semua pasti sudah mengenal bentuk umum dari persamaan garis, yaitu $y = mx + c$. Untuk menentukan persamaan

garis yang melalui titik (a, b) dengan gradien m, substitusikan $x = a$ dan $y = b$ pada persamaan garis $y = mx + c$ sehingga diperoleh:

$b = ma + c$ atau $c = b - ma$

Langkah selanjutnya adalah mensubstitusikan nilai c pada persamaan awal, yaitu $y = mx + c$ sehingga diperoleh:

$y = mx + (b - ma)$

$\Leftrightarrow y - b = mx - ma$

$\Leftrightarrow y - b = m(x - a)$

Jadi, persamaan garis yang melalui titk (a, b) dengan gradien m adalah $y - b = m(x - a)$.

Contoh

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (-4, 5) dengan gradien 2!

Penyelesaian:

$a = -4;\quad b = 5;\quad m = 2$

$y - b = m(x - a) \quad \Leftrightarrow y - 5 = 2(x - (-4))$

$\Leftrightarrow y - 5 = 2(x + 4)$

$\Leftrightarrow y - 5 = 2x + 8$

$\Leftrightarrow y = 2x + 13$

Latihan Soal

Tentukan persamaan garis yang melalui titik-titik dan memiliki gradien berikut ini!

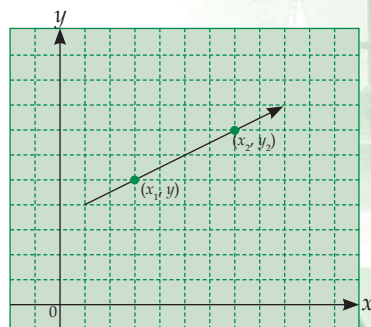
1. (3, 6), gradien 3
2. (-4, 2), gradien 2
3. (5, -1), gradien 2
4. (-2, -5), gradien 4
5. (1, 3), gradien 3/2
6. (4, 5), gradien -2
7. (-2, 2) gradien -3
8. (3, -4) gradien -4
9. (-3, -2), gradien -2
10. (2, 6), gradien 2

2 Menentukan Persamaan Garis yang Melalui Titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)

Kalian masih ingat cara mencari gradien garis yang melalui dua buah titik. Coba kalian ingat-ingat kembali bagaimana cara mencari gradien apabila diketahui dua buah titik, misalkan (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)! Gradien garis yang melalui titik tersebut adalah

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ atau $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. Dengan menggunakan rumus pada bagian sebelumnya kalian akan peroleh persamaan garis berikut.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ atau } y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2)$$

dimana $x_1 \neq x_2$.

Contoh

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (3, 5) dan (-2, 4)!

Penyelesaian:

$x_1 = 3;\; y_1 = 5;\; x_2 = -2;\; y_2 = 4;$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y - 5 = \frac{4 - 5}{-2 - 3}(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow y - 5 = \frac{1}{5}(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow y - 5 = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$$

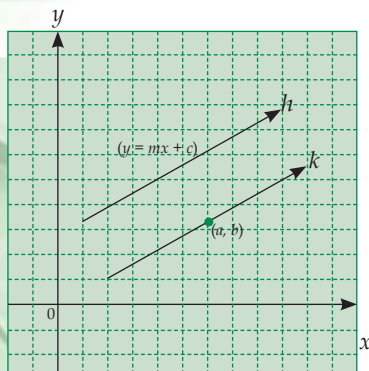
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x + \frac{22}{5}$$

Latihan Soal

Tentukan persamaan garis yang melalui titik-titik berikut!

1. (3, 6) dan (4, 2)
2. (4, 5) dan (-3, 6)
3. (2, 4) dan (-1, -2)
4. (-1, 5) dan (-3, 2)
5. (2, 4) dan (-2, 2)
6. (-2, 6) dan (1, -4)
7. (-3, -5) dan (-2, 3)
8. (-1, -4) dan (1, -2)
9. (-4, -3) dan (-1, -5)
10. (12, 8) dan (4, 5)

3 Menentukan Persamaan Garis yang Sejajar Dengan Garis Lain dan Melalui Sebuah Titik

Hal pertama yang harus dilakukan sebelum menentukan persamaan garis yang sejajar dengan garis lain dan melalui sebuah titik adalah menentukan gradien garis-garis sejajar tersebut. Bagaimana caranya? Perhatikan gambar di samping! Garis h memiliki persamaan $y = mx + c$. Garis k sejajar garis h dan melalui titik (a,b) sehingga gradien garis k (m_k) sama dengan gradien garis h (m_h), yaitu m. (Ingat bahwa gradien garis yang sejajar adalah sama).

Berdasarkan rumus sebelumnya, kita peroleh persamaan garis k adalah $y - b = m(x - a)$.

Jadi, persamaan garis yang sejajar dengan garis $y = mx + c$ dan melalui titik (a, b) adalah $y - b = m(x - a)$.

Contoh

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (3, 5) dan sejajar garis $y = 2x - 4$!

Penyelesaian:

Gradien garis $y = 2x - 4$ dalah $m = 2$. Persamaan garis yang melalui titik (3, 5) dan sejajar garis $y = 2x - 4$ adalah

$y - 5 = 2(x - 3)$

$\Leftrightarrow\ y - 5 = 2x - 6$

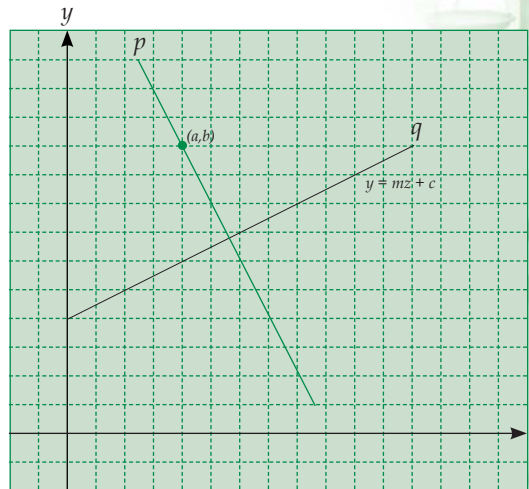
$\Leftrightarrow\ y = 2x - 1$

Latihan Soal

Tentukan persamaan garis pada soal-soal berikut ini!

1. Melalui titik (-4, 5) dan sejajar garis $y = 3x - 4$
2. Melalui titik (2, -3) dan sejajar garis $y = -2x + 3$
3. Melalui titik (3, 6) dan sejajar garis $y = \frac{3}{4}x - 1$
4. Melalui titik (4, 5) dan sejajar garis $y = 2x - 5$
5. Melalui titik (-2, -1) dan sejajar garis $2x - 3y - 6 = 0$
6. Melalui titik (4, -3) dan sejajar garis $4x + 2y + 1 = 0$
7. Melalui titik (2, -4) dan sejajar garis $x - 2y = 8$

4 Menentukan Persamaan Garis yang Tegak Lurus Dengan Garis Lain dan Melalui Sebuah Titik

Masih ingatkah kalian bagaimana gradien dua buah garis yang saling tegak lurus seperti terlihat pada gambar di samping? Jika diketahui persamaan garis q adalah $y = mx + c$ dan garis p tegak lurus garis q dan melalui titik (a,b), dapatkah kalian mencari persamaan garis p? Perhatikan contoh berikut.

Contoh

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (-2, 4) dan tegak lurus garis $y = 2x - 4$!

Penyelesaian:

Gradien garis $y = 2x - 4$ adalah $m = 2$. Persamaan garis yang melalui titik (-2, 4) dan tegak lurus garis $y = 2x - 4$ adalah

$$y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow \quad y - 4 = -\frac{1}{2}(x - (-2))$$

$$\Leftrightarrow \quad y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Jadi persamaan garis yang melalui titik (-2, 4) dan tegak lurus garis $y = 2x - 4$ adalah $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Berdasarkan contoh di atas dapatkah kalian menentukan rumus untuk mencari persamaan garis yang melalui titik (a, b) dan tegak lurus garis $y = mx + c$? Agar kalian lebih memahaminya, lakukanlah kegiatan berikut ini.

Tugas

Berdasarkan penjelasan sebelumnya lengkapilah titik-titik berikut ini! Salin dan kerjakan pada buku latihanmu!

Persamaan garis q adalah $y = mx + c$ maka m = ...

Garis p tegak lurus garis q sehingga: $m_p \times m_q = ... \Leftrightarrow m_p = -\frac{...}{...} = -\frac{1}{...}$

Persamaan garis p yang bergradien $m_p = -\frac{1}{...}$ dan melalui titik (a, b) adalah:

$$y - ... = -\frac{...}{...}(x - ...)$$

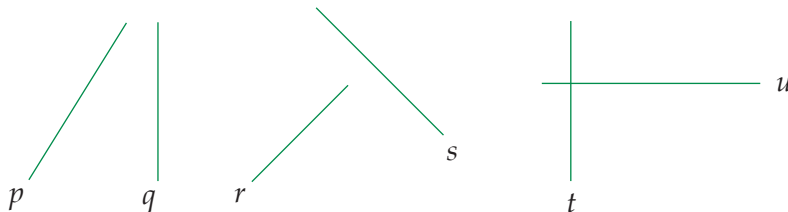
Jika kalian melengkapi titik-titik dalam kegiatan tersebut dengan benar maka akan diperoleh sebuah kesimpulan, yaitu persamaan garis yang melalui titik (a, b) dan tegak lurus garis $y = mx + c$ adalah $y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$.

Latihan Soal

Tentukan persamaan garis pada soal-soal berikut ini!

1. Melalui titik (4, 5) dan tegak lurus garis $y = 2x - 3$
2. Melalui titik (-2, -3) dan tegak lurus garis $y = -x + 5$
3. Melalui titik (2, -3) dan tegak lurus garis $y = -\frac{2}{3}x - 1$
4. Melalui titik (-4, -5) dan tegak lurus garis $y = -3x + 4$
5. Melalui titik (-2, -1) dan tegak lurus garis $3x - y + 2 = 0$

D Titik Potong Dua Buah aris

Dua buah garis yang tidak sejajar akan berpotongan di satu titik. Perhatikan gambar di bawah ini!

Pada gambar terlihat bahwa garis p dan q, garis r dan s, serta garis t dan u akan berpotongan di satu titik. Misal terdapat dua buah garis yang tak sejajar dengan persamaan $y = a_1x + b_1$ dan

$y = a_2x + b_2$, $a_1 \neq a_2$ dan berpotongan di titik (x_0, y_0). Titik perpotongan dua garis tersebut dapat dicari dengan mensubstitusikan (x_0, y_0) ke masing-masing persamaan, sehingga diperoleh:

$$y_0 = a_1 x_0 + b_1 \quad \dots (1)$$

$$y_0 = a_2 x_0 + b_2 \quad \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$a_1 x_0 + b_1 = a_2 x_0 + b_2$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1x_0 - a_2x_0 = b_2 - b_1$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0(a_1 - a_2) = b_2 - b_1$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

Untuk mencari nilai y_0 dapat dilakukan dengan cara mensubstitusikan nilai $x_0 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$ ke dalam persamaan (1) atau persamaan (2). Misalkan kita memasukkan nilai x_0 ke persamaan (1) sehingga diperoleh:

$$y_0 = a_1 x_0 + b_1$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0 = a_1\left[\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}\right] + b_1$$

Contoh

Tentukan titik potong garis $y = 2x - 4$ dan $y = -3x + 6$!

Penyelesaian:

Cara I

$a_1 = 2$; $b_1 = -4$; $a_2 = -3$; $b_2 = 6$

$$x_0 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} = \frac{6 - (-4)}{2 - (-3)} = \frac{10}{5} = 2$$

$$y_0 = 2x + (-4) = 2(2) - 4 = 0$$

Jadi titik potongnya adalah (2, 0)

Cara II

$$y = 2x - 4 \quad \dots (1)$$

$$y = -3x + 6 \quad \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$$2x - 4 = -3x + 6$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 3x = 6 + 4$$

$\Leftrightarrow \quad 5x = 10$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$

Substitusi $x = 2$ ke persamaan (1) atau (2) sehingga:

$y = -3x + 6$

$y = -3(2) + 6 = -6 + 6 = 0$

Jadi titik potongnya adalah (2, 0)

Latihan Soal

Tentukanlah titik potong persamaan garis pada soal-soal berikut ini!

1. Garis $y = -x + 2$ dan $y = x - 1$
2. Garis $y = 3x + 4$ dan $y = 2x - 3$
3. Garis $y = -2x + 5$ dan $y = 5x - 1$
4. Garis $y = -x + 2$ dan $y = x + 1$
5. Garis $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ dan $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$
6. Garis $y = -5x - 2$ dan $y = -2x + 1$

E Penera an onse Persamaan aris Lurus dalam ehidu an

Dalam kehidupan sehari-hari kalian akan menemukan permasalahan yang dapat diselesaikan dengan konsep persamaan garis lurus. Perhatikan contoh berikut.

Contoh

Ibu Irma membeli 2 kg apel dan 5 kg jeruk dengan harga Rp 46.000,00. Ibu Novi membeli 3 kg apel dan 4 kg jeruk dengan harga Rp 48.000,00. Tentukan harga 2 kg apel dan 3 kg jeruk!

Penyelesaian:

Misalkan:

x = harga 1 kg apel dan y = harga 1 kg jeruk

$2x + 5y = 46.000 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + 9.200 \qquad \ldots (1)$

$3x + 4y = 48.000 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 12.000 \qquad \ldots (2)$

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$$-\frac{2}{5}x + 9.200 = -\frac{3}{4}x + 12.000$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}x = 12.000 - 9.200$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{8}{20}x + \frac{15}{20}x = 12.000 - 9.200$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{7}{20}x = 2.800$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2.800 \times 20}{7} = 8.000$$

Substitusi $x = 8.000$ ke persamaan (1)

$$y = -\frac{2}{5}x + 9.200$$

$$= -\frac{2}{5}(8.000) + 9.200$$

$$= -3.200 + 9.200 = 6.000$$

Harga 2 kg apel dan 3 kg jeruk adalah:

$$2x + 5y = 2(8.000) + 3(6.000)$$

$$= 16.000 + 18.000 = 34.000$$

Jadi, harga 2 kg apel dan 3 kg jeruk adalah Rp 34.000,00.

Latihan Soal

1. Trisno membeli 4 buku tulis dan 3 pensil di koperasi sekolah dengan harga Rp 16.750,00. Ilham membeli 2 buku tulis dan 1 pensil di tempat yang sama dengan harga Rp 7.250,00. Tentukan harga 3 buku tulis dan 4 pensil yang dibeli Aam di koperasi tersebut!
2. Ayah membeli 2 kg rambutan dan 3 kg mangga seharga Rp 28.000,00 di toko buah "Manis Rasanya". Di tempat yang sama Pak Amran membeli 4 kg rambutan dan 2 kg mangga seharga Rp 32.000,00. Tentukan harga 3 kg rambutan dan 4 kg mangga yang dibeli Paman di toko buah tersebut!
3. Alif membeli 4 baju dan 5 celana dengan harga Rp 340.000,00. Di toko yang sama Ima membeli 3 baju dan 7 celana dengan harga Rp 385.000,00. Tentukan uang yang harus dibayarkan Lela jika ia membeli 5 baju dan 3 celana di toko yang sama dengan Alif dan Ima!
4. Sebuah tanah yang berbentuk persegi panjang mempunyai keliling 56 m. Jika panjangnya 8 meter lebih dari lebarnya, tentukan ukuran tanah yang dimaksud (panjang dan lebar tanah)!

Otak-Atik Matematika

Sebuah garis p memiliki gradien m dan melalui titik (a,b). Jika garis p berpotongan dengan garis q yang persamaannya $y = 4mx + c$, dapatkah kalian tentukan nilai b jika diketahui kedua garis tersebut berpotongan di $x = \frac{b-c}{3m}$.

Petunjuk:

Tentukan persamaan garis p dan cari titik potongnya dengan persamaan garis q!

Rangkuman

1. Sumbu koordinat adalah dua garis yang saling tegak lurus dan berpotongan di satu titik pusat (0,0) yang menjadi acuan dalam menentukan posisi atau letak suatu titik.
2. Bentuk umum persamaan garis adalah:
   - $y = mx$ yang melalui titik (0,0) dan titik (x, y)
   - $y = mx + c$ yang melalui titik (0, c) dan titik $(x, y + c)$
3. Gradien garis yang melalui titik (0,0) dan (x, y) adalah $m = \frac{y}{x}$.
4. Gradien garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
5. Gradien garis yang sejajar sumbu x sama dengan 0.
6. Gradien garis yang sejajar sumbu y tidak didefinisikan.
7. Gradien dua buah garis yang sejajar adalah sama.
8. Gradien dua buah garis yang saling tegak lurus adalah $m_1 \times m_2 = -1$.
9. Persamaan garis yang melalui titik (a, b) dan mempunyai gradien m adalah $y - b = m(x - a)$.
10. Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$ atau $y - y_2 = m(x - x_2)$.
11. Persamaan garis yang melalui titik (a, b) dan tegak lurus garis $y = mx + c$ adalah $y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$.

Uji Kemampuan

A. Pilihlah satu jawaban yang paling tepat, a, b, c, atau d! Tuliskan pada lembar jawabanmu!

1. Gradien persamaan garis yang melalui titik pusat dan titik (2, 5) adalah ....
   a. $\frac{2}{5}$
   b. $\frac{5}{2}$
   c. $-\frac{2}{5}$
   d. $-\frac{5}{2}$

2. Gradien persamaan garis yang melalui titik (4, 2) dan titik (2, 5) adalah ....
   a. $-\frac{3}{2}$
   b. $-\frac{2}{3}$
   c. $\frac{3}{2}$
   d. $\frac{2}{3}$

3. Garis g sejajar dengan garis h. Jika persamaan garis h adalah $y = \frac{3}{4}x - 5$ maka gradien garis g adalah ....
   a. $-\frac{4}{3}$
   b. $-\frac{3}{4}$
   c. $\frac{3}{4}$
   d. $\frac{4}{3}$

4. Persamaan garis p adalah $3y - 6x = 12$. Jika garis q tegak lurus garis p, gradien garis q adalah ....
   a. 2
   b. –2
   c. $-\frac{1}{2}$
   d. $\frac{1}{2}$

5. Garis g memiliki gradien -2 dan melalui titik (2, 3). Persamaan garis g adalah ....
   a. $y = -2x + 1$
   b. $y = -2x - 1$
   c. $y = -2x + 7$
   d. $y = -2x - 7$

6. Persamaan garis berikut yang memiliki gradien $-\frac{1}{3}$ adalah ....
   a. $3y + x = 2$
   b. $3y - x = 2$
   c. $y + 3x = 2$
   d. $y - 3x = 2$

7. Persamaan garis yang melalui titik (2, 1) dan titik (-2, -7) adalah ....
   a. $y = -2x + 5$
   b. $y = -2x + 3$
   c. $y = 2x - 3$
   d. $y = 2x + 3$

8. Garis g sejajar garis h. Jika garis g melalui titik (-3, 4) dan persamaan garis h adalah $y = -3x + 2$, maka persamaan garis g adalah ....
   a. $y = -3x + 9$
   b. $y = 3x + 5$
   c. $y = -3x + 3$
   d. $y = -3x - 5$
9. Garis p tegak lurus garis q. Jika persamaan garis p adalah $y = -\frac{1}{2}x + 1$ dan garis q melalui titik (-1,-4) maka persamaan garis q adalah ....
   a. $y = 2x + 2$
   b. $y = -2x - 2$
   c. $y = 2x - 2$
   d. $y = \frac{1}{2}x + 2$
10. Persamaan garis lurus yang melalui titik (-2, -1) dan tegak lurus garis $4x - 3y + 5 = 0$ adalah ....
   a. $4y + 3x + 10 = 0$
   b. $4y + 3x - 10 = 0$
   c. $4y - 3x + 10 = 0$
   d. $4y - 3x - 10 = 0$
11. Persamaan garis yang melalui titik (-3, 2) dan tegak lurus garis yang melalui titik (5, 2) dan (-5, -3) adalah ....
   a. $y + 2x + 4 = 0$
   b. $y + 2x - 4 = 0$
   c. $-y - 2x + 4 = 0$
   d. $y - 2x + 4 = 0$
12. Titik $P = (a, 2)$ dan $Q = (3, b)$ terletak pada garis $3x - 7y = -26$, nilai $a + b$ adalah ....
   a. 1
   b. –1
   c. 2
   d. 3
13. Titik potong garis $y = -x + 2$ dan $y = x - 1$ adalah ....
   a. $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
   b. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
   c. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
   d. $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
14. Persamaan garis yang melalui titik potong garis $y = 2x - 1$ dan $y = 4x - 5$ serta tegak lurus garis yang melalui titik $A = (2, -4)$ dan $B = (-2, -2)$ adalah ....
   a. $2x + y = 1$
   b. $\frac{1}{2}x + y = 1$
   c. $2x - y = 1$
   d. $-\frac{1}{2}x - y = 1$
15. Ibu Irma membeli 2 kg rambutan dan 5 kg mangga dengan harga Rp 35.000,00. Ibu Novi membeli 4 kg rambutan dan 2 kg mangga dengan harga Rp 22.000,00. Harga 2 kg rambutan dan 3 kg mangga adalah ....
   a. Rp 25.000,00
   b. Rp 24.000,00
   c. Rp 23.000,00
   d. Rp 22.000,00
16. Persamaan garis lurus yang melalui titik (2, -1) dan tegak lurus garis $3x + 2y = 4$ adalah ....

a. $3y + 2x + 7 = 0$
b. $3y - 2x + 7 = 0$
c. $3y - 2x - 7 = 0$
d. $3y + 2x - 7 = 0$

17. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut ini!
    (i) Garis k tegak lurus dengan garis $x + 2y + 7 = 0$
    (ii) Garis g sejajar dengan garis $3y - 6x - 8 = -2y + 4x - 12$
    (iii) $2y - 10 = 4x + 5$

    Pernyataan yang nilai gradiennya sama dengan 2 adalah ....
    a. (i), (ii)
    b. (i), (iii)
    c. (ii), (iii)
    d. (i), (ii), (iii)

18. Persamaan garis yang melalui titik pusat (0, 0) dan melalui titik $P(-2, 4)$ adalah ....
    a. $y - 2x = 0$
    b. $y + 2x = 0$
    c. $y = -\frac{1}{2}x$
    d. $y = \frac{1}{2}x$

19. Titik $D = (-a, 3)$ terletak pada garis $2x + 3y = 15$, nilai $3a$ adalah ....
    a. 3
    b. –3
    c. 9
    d. -9

20. Titik $E = (8, 3b)$ dan terletak pada garis $4x - 5y = 2$, nilai b adalah ....
    a. 1
    b. 2
    c. 3
    d. 4

B. Selesaikan soal-soal berikut ini!

1. Gambarlah grafik persamaan garis lurus yang diberikan dalam soal dengan terlebih dahulu menentukan dua titik potongnya!
   a. $5x + 3y = -15$
   b. $6x + 3y - 12 = 0$
2. Nyatakan persamaan berikut dalam bentuk $y = mx + c$!
   a. $2x + 3y - 12 = 0$
   b. $-2x + 3y = 5x + 21$
   c. $-x + y = 5$
   d. $16x - 5y = 2x + 3y - 8$
   e. $3x + y - 7 = x - 2y - 13$
3. Garis g sejajar garis h. Jika garis g melalui titik (-4, 3) dan persamaan garis h adalah $y + 3x = 2$, tentukan persamaan garis g!
4. Garis p tegak lurus garis q. Jika persamaan garis p adalah $y = -\frac{1}{3}x + 5$ dan garis q melalui titik (1, -2), tentukan persamaan garis q!

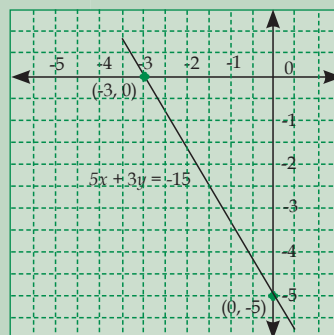
5. Tentukan gradien dari garis berikut jika diketahui:
   a. Melalui titik pusat dan titik (2, -4)
   b. Melalui titik (3,-5) dan titik (4, -2)
   c. Sejajar dengan garis $2x - 4y = 8$
   d. Tegak lurus garis $-3x - 5y = 15$
   e. Sejajar garis x
6. Hayati membeli 3 kg telur dan 5 kg beras dengan harga Rp 54.000,00 di supermarket "Pelita". Di tempat yang sama Wina membeli 6 kg telur dan 3 kg beras dengan harga Rp 66.000,00. Jika Leni membeli 4 kg telur dan 7 kg beras di supermarket tersebut, berapa rupiah harga belanjaan Leni. Jika ia membayar dengan uang Rp 100.000,00, berapa uang kembalian yang diterima Leni!
7. Ayah membeli 3 kg apel dan 2 kg mangga seharga Rp 34.500,00 di toko buah "Manis Rasanya". Di tempat yang sama Pak Amran membeli 4 kg apel dan 3 kg mangga seharga Rp 48.000,00. Tentukanlah harga 3 kg apel dan 5 kg mangga yang dibeli Paman di toko buah tersebut!

KUNCI JAWABAN BAB 3

A. Pilihan Ganda

1. b
3. c
5. c
7. c
9. c
11. a
13. a
15. c
17. d
19. d

B. Uraian

1. a. Titik potongnya adalah (0, -5) dan (-3, 0)

3. $y = -3x - 9$
5. a. -2
   c. $\frac{1}{2}$
   e. 0
7. Rp 52.500,00

Bab

Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini siswa diharapkan mampu:

- Menyebutkan perbedaan persamaan linear dua variabel dan sistem persamaan linear dua variabel;
- Menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel;
- Membuat model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel;
- Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel dan penafsirannya;
- Menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dalam kehidupan sehari-hari.

Ibu Hayati dan ibu Sofi pergi berbelanja di pasar. Ibu Hayati membeli 3 kg apel dan 4 kg jeruk dengan harga Rp 58.000,00. Ibu Sofi membeli 4 kg apel dan 3 kg jeruk dengan harga Rp 61.000,00. Dapatkah kamu menentukan harga 2 kg apel dan 3 kg jeruk? Persoalan tersebut dapat diselesaikan dengan persamaan liner. Caranya dengan memisalkan buah apel sebagai x dan buah jeruk sebagai y lalu memasukkannya dalam sebuah persamaan.

Peta konsep

Sistem persamaan linear dua variabel

- A. Persamaan linear dua variabel
  1. Pengertian persamaan linear dua variabel
  2. Penyelesaian persamaan linear dua variabel
- B. Sistem persamaan linear dua variabel
  1. Menentukan himpunan penyelesaian SPLDV dengan metode grafik
  2. Menentukan himpunan penyelesaian SPLDV dengan metode substitusi
  3. Menentukan himpunan penyelesaian SPLDV dengan metode eliminasi
  4. Menentukan himpunan penyelesaian SPLDV dengan metode campuran (eliminasi dan substitusi)
- C. Menyelesaikan soal cerita yang berhubungan dengan SPLDV
  1. Membuat model matematika
  2. Mencari himpunan penyelesaian

A Persamaan Linear Dua Variabel

Masih ingat apa yang dimaksud dengan persamaan linear satu variabel? Coba kalian perhatikan persamaan berikut.

$2x + 3 = -4$; $3y - 2 = 5$; dan $-z + 3 = 7$.

Persamaan-persaman di atas memiliki sebuah variabel, yaitu x, y, dan z. Lalu bagaimana bentuk persamaan linear dua variabel? Ayo kita simak pada uraian berikut!

1 Pengertian Persamaan Linear Dua Variabel

Misalkan kita menemukan persamaan $2x + 3y = 6$ atau $q - 2r = 3$. Pada persamaan tersebut masing-masing mempunyai dua variabel, yaitu x dan y serta q dan r. Jadi, persamaan linear dua variabel adalah persamaan yang dapat dituliskan dalam bentuk $ax + by = c$ dimana x dan y adalah variabel dan $a, b, c \in R$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

Contoh

- $3x - 2y = 10$ (persamaan linear dua variabel)
- $-4p - 2q = 3$ (persamaan linear dua variabel)
- $x^2 - 2y = 5$ (bukan persamaan linear dua variabel)
- $3x - 2y + 5z = 10$ (bukan persamaan linear dua variabel)

2 Penyelesaian Persamaan Linear Dua Variabel

Menentukan penyelesaian persamaan linear dua variabel berbentuk $ax + by = c$ sama artinya dengan mencari bilangan-bilangan pengganti x dan y yang memenuhi persamaan tersebut. Himpunan penyelesaian dari persamaan $ax + by = c$ merupakan pasangan berurutan (x, y). Hal ini pernah kalian pelajari juga pada bab yang membahas tentang fungsi. Agar lebih mudah mencari penyelesaian suatu persamaan biasanya digunakan tabel. Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian dari PLDV dari

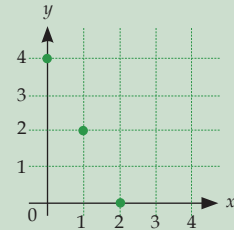
$2x + y = 4$, jika:

a. x dan y variabel pada himpunan bilangan cacah

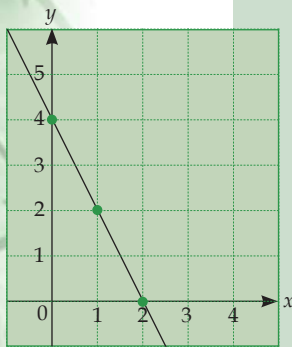
b. x dan y variabel pada himpunan bilangan real

Penyelesaian:

a. Perhatikan x dan y variabel pada himpunan bilangan cacah, jika dihasilkan nilai yang bukan bilangan cacah maka itu bukan himpunan penyelesaiannya.

x	y
0	4
1	2
2	0

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah:
$\{(0, 4), (1, 2), (2, 0)\}$

b. Jika x dan y variabel pada himpunan bilangan real, maka terdapat tak hingga banyaknya himpunan penyelesaiannya. Jika digambarkan dalam grafik maka diperoleh garis lurus seperti terlihat pada gambar di samping. Himpunan penyelesaiannya dapat ditulis:

$$\{(x, y) \mid 2x + y = 4;\ x, y \in R\}$$

Latihan Soal

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan linear dua variabel $3x - y = 6$ jika:
   a. x dan y variabel pada himpunan bilangan cacah
   b. x dan y variabel pada himpunan bilangan real
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan linear dua variabel $-2x + 3y = 12$ jika:
   a. x dan y variabel pada himpunan bilangan cacah
   b. x dan y variabel pada himpunan bilangan real
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan linear dua variabel $x + 4y = 8$ jika:
   a. x dan y variabel pada himpunan bilangan asli
   b. x dan y variabel pada himpunan bilangan real
4. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan linear dua variabel $5x - 2y = 1$ jika:
   a. x dan y variabel pada himpunan bilangan cacah
   b. x dan y variabel pada himpunan bilangan real

B Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Dalam persamaan linear dua variabel kalian akan menemukan himpunan penyelesaian yang berupa pasangan berurutan. Apabila terdapat dua buah persamaan linear dua variabel yang berbentuk $ax + by = c$ dan $px + qy = r$, dimana persamaan yang satu dan lainnya tidak terpisahkan, maka persamaan-persamaan tersebut dinamakan sistem persamaan linear dua variabel. Bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel adalah:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$$

Dalam sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) di atas, a, b, p, dan q disebut koefisien, x dan y adalah variabel dari SPLDV, serta c dan r disebut konstanta. Nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan tersebut dinamakan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel. Semua variabel, koefisien dan konstanta dalam SPLDV merupakan bilangan real. Pertanyaan kita sekarang adalah bagaimana cara untuk menentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel?

Untuk menentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel dapat dilakukan dengan empat metode, yaitu metode grafik, metode substitusi, metode eliminasi, dan metode campuran (substitusi dan eliminasi).

1 Menentukan Himpunan Penyelesaian SPLDV dengan Metode Grafik

Ketika menggunakan metode grafik, kalian harus menggambar masing-masing persamaan linear dua variabel tersebut dalam koordinat kartesius. Himpunan penyelesaiannya adalah titik potong dari kedua garis. Jika garisnya tidak berpotongan atau sejajar maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong. Namun demikian, jika garisnya berhimpit maka jumlah himpunan penyelesaiannya tak berhingga.

Math Info

Pada geometri Euclid, dua garis yang sejajar tidak mungkin untuk saling berpotongan. Postulat ini tidak berlaku di geometri non-Euclidian. (Sumber: Encarta)

Contoh

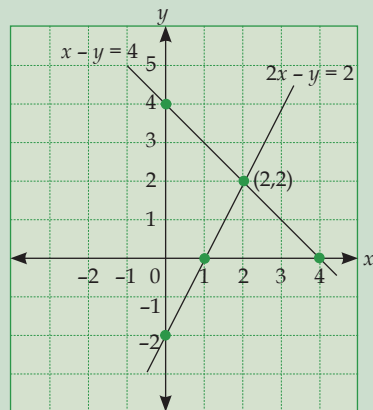
1. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$ dengan menggunakan metode grafik! (x dan y himpunan bilangan real)

Penyelesaian:

$2x - y = 2$

x	0	1
y	–2	0

$x + y = 4$

x	0	4
y	4	0

Titik potong kedua garis adalah (2, 2). Jadi himpunan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah (2, 2).

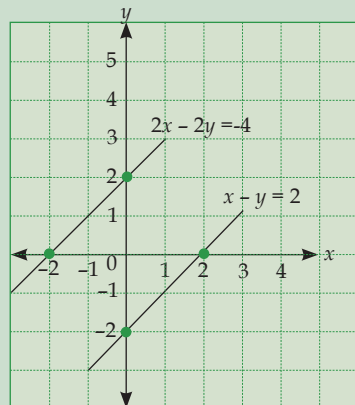
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$ dengan menggunakan metode grafik! (x dan y himpunan bilangan real)

   Penyelesaian:

   $x - y = 2$

x	0	2
y	-2	0

   $2x - 2y = -4$

x	0	-2
y	2	0

   Kedua garis ternyata sejajar, sehingga tidak ada titik potong. Jadi himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong { }.

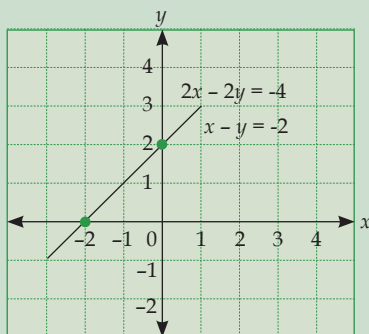
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$ dengan menggunakan metode grafik! (x dan y himpunan bilangan real)

   Penyelesaian:

$x - y = -2$

x	0	-2
y	2	0

$2x - 2y = -4$

x	0	-2
y	-2	0

Kedua garis ternyata berimpit. Maka himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel tersebut tak berhingga banyaknya.

Latihan Soal

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut menggunakan metoda grafik!

1. $\begin{cases} x + y = 6;\ x,y \in R \\ 3x + y = 10;\ x,y \in R \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x + y = 12;\ x,y \in R \\ 2x + y = 8;\ x,y \in R \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x - 5y = 2;\ x,y \in R \\ 7x + 3y = 12;\ x,y \in R \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x + 2y = 29;\ x,y \in R \\ x + 2y = 15;\ x,y \in R \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x + 4y = 10;\ x,y \in R \\ 4x - 5y = 34;\ x,y \in R \end{cases}$

2 Menentukan Himpunan Penyelesaian SPLDV dengan Metode Subtitusi

Setelah kita belajar cara menentukan himpunan penyelesaian SPLDV menggunakan metode grafik, sekarang kita akan mempelajari cara menentukan himpunan penyelesaian SPLDV menggunakan metode substitusi. Langkah-langkah pengerjaan dengan menggunakan metode substitusi untuk mencari himpunan penyelesaian dari SPLDV adalah sebagai berikut.

Ingat !!!

Pilihlah persamaan yang mudah untuk diubah ke dalam bentuk x = ... atau y = ...

- Ubahlah salah satu persamaan ke dalam bentuk x = ... atau y = ...
- Masukkan (substitusi) nilai x atau y yang diperoleh ke dalam persamaan yang kedua
- Nilai x atau y yang diperoleh kemudian disubstitusikan ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai variabel lainnya yang belum diketahui (x atau y).

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 2x + y = 4;\ x,y \in R \\ -x + 2y = -7;\ x,y \in R \end{cases}$ menggunakan metode substitusi!

Penyelesaian:

Langkah **1** (mengubah ke dalam bentuk x = ... atau y = ...)

$2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x$

Langkah **2** (substitusi $y = 4 - 2x$ ke persamaan $-x + 2y = -7$)

$$\begin{aligned} -x + 2y = -7 &\Leftrightarrow -x + 2(4 - 2x) = -7 \\ &\Leftrightarrow -x + 8 - 4x = -7 \\ &\Leftrightarrow -x - 4x = -7 - 8 \\ &\Leftrightarrow -5x = -15 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-15}{-5} \\ &\quad x = 3 \end{aligned}$$

Langkah **3** (substitusi $x = 3$ ke $2x + y = 4$ atau $-x + 2y = -7$)

$$\begin{aligned} 2x + y = 4 &\Leftrightarrow 2(3) + y = 4 \\ &\Leftrightarrow 6 + y = 4 \\ &\Leftrightarrow y = 4 - 6 = -2 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 2x + y = 4;\ x,y \in R \\ -x + 2y = 7;\ x,y \in R \end{cases}$ adalah {(3, -2)}.

Latihan Soal

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} x + y = 5;\ x,y \in R \\ 2x - y = 1;\ x,y \in R \end{cases}$ dengan menggunakan metode substitusi!

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 3x + 2y = 5; x,y \in R \\ 2x + y = 1; x,y \in R \end{cases}$ dengan menggunakan metode substitusi!
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 3x + 2y = 6; x,y \in R \\ 2x + 4y = 4; x,y \in R \end{cases}$ dengan menggunakan metode substitusi!
4. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 3x - 5y = -9; x,y \in R \\ 2x - 6y = -14; x,y \in R \end{cases}$ dengan menggunakan metode substitusi!
5. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} -2x - 3y = 15; x,y \in R \\ 3x + 5y = -29; x,y \in R \end{cases}$ dengan menggunakan metode substitusi!

3 Menentukan Himpunan Penyelesaian SPLDV dengan Metode Eliminasi

Penyelesaian SPLDV dengan metode eliminasi pada dasarnya adalah menghilangkan (mengeliminasi) salah satu variabel dari sistem persamaan yang akan dicari himpunan penyelesaiannya. Caranya dengan menjumlahkan atau mengurangkan kedua sistem persamaan tersebut.

Untuk menentukan variabel y, maka hilangkan terlebih dahulu variabel x. Begitu pula sebaliknya, untuk menentukan variabel x, maka hilangkan terlebih dahulu variabel y. Sebagai catatan, untuk menghilangkan variabel x atau y maka koefisien dari masing-masing variabel dalam sistem persamaan haruslah sama. Jika salah satunya tidak sama maka harus disamakan dahulu. Caranya mengalikan dengan bilangan bulat tertentu sehingga koefisiennya menjadi sama. Perhatikan contoh berikut!

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 2x - y = -2; x,y \in R \\ x + 2y = 4; x,y \in R \end{cases}$ dengan menggunakan metode eliminasi!

Penyelesaian:

- Mengeliminasi variabel x (untuk mencari y)

$$\begin{array}{l|c|l} 2x - y = -2 & \times 1 & 2x - y = -2 \\ x + 2y = 4 & \times 2 & 2x + 4y = 8 \\ \hline \end{array} \; -$$

$$-5y = -10, \text{ maka } y = \frac{-10}{-5} = 2$$

- Mengeliminasi variabel y (untuk mencari x)

$$\begin{array}{l|c|l} 2x - y = -2 & \times 2 & 4x - 2y = -4 \\ x + 2y = 4 & \times 1 & x + 2y \;\;= 4 \;\; + \\ \hline & & 5x \;=\; 0 \\ & & \;\;x = 0 \end{array}$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah {(0, 2)}.

Latihan Soal

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut menggunakan metode eliminasi!

1. $\begin{cases} 2x + 5y = -11; x,y \in R \\ 3x - 4y = 18; x,y \in R \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 5y = 20; x,y \in R \\ -3x + 7y = 57; x,y \in R \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x - 7y = 5; x,y \in R \\ 5x + 2y = 22; x,y \in R \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x - 6y = -3; x,y \in R \\ 2x + 3y = 19; x,y \in R \end{cases}$
5. $\begin{cases} -3x + 2y = -11; x,y \in R \\ 4x - 5y = 3; x,y \in R \end{cases}$
6. $\begin{cases} 4x + 5y = 6; x,y \in R \\ x - 3y = 27; x,y \in R \end{cases}$

4 Menentukan Himpunan Penyelesaian SPLDV dengan Metode Campuran (Eliminasi dan Substitusi)

Dalam pengerjaan soal persamaan linear dua variabel, terkadang kita menemukan kesulitan jika menggunakan metoda eliminasi untuk menentukan himpunan penyelesaiannya. Oleh karena itu, kita dapat menggunakan metode campuran, yaitu menentukan salah satu variabel x atau y dengan menggunakan metode eliminasi. Hasil yang diperoleh dari x atau y kemudian disubstitusikan ke salah satu persamaan linear dua variabel tersebut. Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} x + 2y = 7; x,y \in R \\ 2x + 3y = 10; x,y \in R \end{cases}$ menggunakan metode campuran!

Penyelesaian:

- Mengeliminasi variabel x (untuk mencari y)

$$\begin{array}{l|c|l} x + 2y = 7 & \times 2 & 2x + 4y = 14 \\ 2x + 3y = 10 & \times 1 & 2x + 3y = 10 \\ \hline & & y = 4 \quad - \end{array}$$

- Substitusi $y = 4$ ke persamaan $2x + 3y = 10$

$$\begin{aligned} 2x + 3y = 10 &\Leftrightarrow 2x + 3(4) = 10 \\ &\Leftrightarrow 2x + 12 = 10 \\ &\Leftrightarrow 2x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah {(-1, 4)}.

Latihan Soal

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut menggunakan metode campuran!

1. $\begin{cases} x + y = 6; \ x,y \in R \\ 3x - y = 10; \ x,y \in R \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 4y = 6; \ x,y \in R \\ 2x + 3y = 2; \ x,y \in R \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + 2y = 3; \ x,y \in R \\ 4x + 6y = 4; \ x,y \in R \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x - 5y = 9; \ x,y \in R \\ 4x - 7y = 13; \ x,y \in R \end{cases}$

C Menyelesaikan Soal Cerita yang Berhubungan Dengan SPLDV

Dalam kehidupan sehari-hari kita dapat menemukan solusi permasalahan yang berhubungan dengan sistem persamaan linear dua variabel. Di awal bab kalian temukan satu contoh permasalahannya. Untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan sistem persamaan linear dua variabel maka langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut.

1 Membuat Model Matematika

Langkah awal untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan SPLDV adalah membuat model matematika. Model matematika ini merupakan penjabaran soal ke dalam kalimat matematika. Dalam hal ini kalian harus mengetahui mana yang menjadi variabel, mana yang menjadi koefisien, dan mana yang menjadi konstanta dari soal cerita yang diberikan.

2 Mencari Himpunan Penyelesaian

Setelah soal tersebut diubah ke dalam bentuk kalimat matematika atau model matematika maka carilah himpunan penyelesaiannya. Untuk mencari himpunan penyelesaian ini kalian dapat menggunakan empat metode yang sudah dibahas pada bagian sebelumnya. Pilih salah satu metode yang kalian anggap paling mudah.

Contoh

Ibu Hayati dan ibu Sofi berbelanja di pasar. Ibu Hayati membeli 3 kg apel dan 4 kg jeruk dengan harga Rp 58.000,00. Ibu Sofi membeli 4 kg apel dan 3 kg jeruk dengan harga Rp 61.000,00. Tentukanlah harga 2 kg apel dan 3 kg jeruk!

Penyelesaian:

- **Membuat model matematika**

  Misalkan:

  Harga 1 kg apel = x rupiah ; Harga 1 kg jeruk = y rupiah

  $3x + 4y = 58.000$

  $4x + 3y = 61.000$

  Pertanyaan: $2x + 3y = ?$

- **Mencari himpunan penyelesaian**

$$\begin{array}{l|l|l} 3x + 4y = 58.000 & \times 4 & 12x + 16y = 232.000 \\ 4x + 3y = 61.000 & \times 3 & 12x + 9y = 183.000 \; - \\ \hline & & 7y = 49.000 \\ & & y = \frac{49.000}{7} = 7.000 \end{array}$$

Substitusi $y = 7.000$ ke persamaan $4x + 3y = 61.000$.

$$\begin{aligned} 4x + 3y = 61.000 &\Leftrightarrow 4x + 3(7.000) = 61.000 \\ &\Leftrightarrow 4x + 21.000 = 61.000 \\ &\Leftrightarrow 4x = 61.000 - 21.000 \\ &\Leftrightarrow 4x = 40.000 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{40.000}{4} = 10.000 \end{aligned}$$

Harga 1 kg apel = Rp 10.000,00 dan harga 1 kg jeruk = Rp 7.000,00

$2x + 3y = 2(10.000) + 3(7.000) = 20.000 + 21.000 = 41.000$

Jadi harga 2 kg apel dan 3 kg jeruk adalah Rp 41.000,00.

Latihan Soal

1. Jumlah dua bilangan adalah 32. Jika diketahui selisih kedua bilangan tersebut adalah 16, tentukan:
   a. Model matematika dari permasalahan tersebut
   b. Bilangan-bilangan yang dimaksud

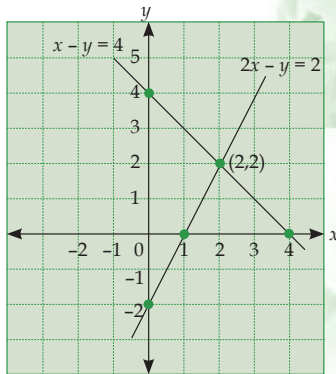
2. Keliling suatu persegi panjang adalah 110 cm. Jika panjangnya 5 cm lebih dari lebar, tentukan:
   a. Model matematika dari permasalahan tersebut
   b. Panjang dan lebar persegi panjang

3. Rani membeli 2 buah buku dan 3 buah pensil di toko buku "Garuda" dengan harga Rp 4.000,00. Di tempat yang sama Dila membeli 3 buah buku dan 2 buah pensil. Ia memberikan uang Rp 10.000,00 dan mendapat kembalian Rp 5.250,00, tentukan:

   a. Model matematika dari permasalahan tersebut
   b. Harga 4 buah buku dan 5 buah pensil

4. Dalam pemutaran film di sebuah bioskop hadir 250 penonton. Harga karcis di kursi bagian depan adalah Rp 25.000,00 sedangkan harga karcis di kursi bagian belakang Rp 15.000,00. Jika uang hasil pemutaran film tersebut jumlahnya ada Rp 4.750.000,00, tentukan:
   a. Model matematika dari permasalahan tersebut
   b. Banyaknya penonton di kursi bagian depan dan banyaknya penonton di kursi bagian belakang.

5. Hanhan membeli 2 baju dan sepasang sepatu untuk sepak bola di toko "SPORT" dengan harga Rp 475.000,00. Sedangkan Dwi membeli 3 baju dan 2 sepatu di toko yang sama dengan harga Rp 820.000,00, tentukan:
   a. Model matematika dari permasalahan tersebut
   b. Uang yang harus dibayarkan jika membeli 4 baju dan 3 sepatu di toko "SPORT"

6. Rizky membeli 2 mobil-mobilan dan 3 robot-robotan seharga Rp 53.000,00. Sedangkan Rifky membeli 5 mobil-mobilan dan 2 robot-robotan seharga Rp 83.000,00, tentukan:
   a. Model matematika dari permasalahan tersebut
   b. Harga 4 mobil-mobilan dan 7 robot-robotan

7. Ayu membeli 5 buah bolu kukus dan 8 buah kue talam di toko "Manda" dengan harga Rp 9.850,00. Di toko yang sama Andini membeli 6 buah bolu kukus dan 7 buah kue talam dengn harga Rp 10.000,00, tentukan:
   a. Model matematika dari permasalahan tersebut
   b. Harga 8 buah bolu kukus dan 12 buah kue talam
   c. Uang kembalian yang Mona terima jika ia membeli 11 bolu kukus dan 5 kue talam di toko yang sama dan memberi uang 2 lembar sepuluh ribuan

Rangkuman

1. Persamaan linear dua variabel adalah persamaan yang dapat dituliskan dalam bentuk $ax + by = c$, dimana x, y variabel dan $a, b, c \in R$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$).
2. Bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel adalah:
   $$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases} \quad a, b, c, p, q, r \in R$$
3. Metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel adalah metode grafik, metode substitusi, metode eliminasi, dan metode campuran (substitusi dan eliminasi).
4. Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel merupakan titik potong dari persamaan garis yang diketahui.
5. Jika kedua garis tidak sejajar atau tidak berpotongan, maka himpunan penyelesaiannya merupakan himpunan kosong.
6. Jika kedua garis berimpit, maka himpunan penyelesaiannya tak terhingga banyaknya.
7. Penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan metode substitusi ialah mengganti salah satu variabel dalam persamaan yang satu dengan variabel pada persamaan lainnya.
8. Penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan metode eliminasi ialah menghapus, menghilangkan, atau mengeliminasi salah satu variabel.
9. Model matematika merupakan penjabaran soal ke dalam kalimat matematika.

Uji Kemampuan

A. Pilihlah satu jawaban yang paling tepat, a, b, c, atau d! Tuliskan pada lembar jawabanmu!

1. Berikut ini merupakan contoh persamaan linear dua variabel, *kecuali* ....
   a. $2x + y = 10$
   b. $x - 2y = 5$
   c. $3x + y - 5 = 0$
   d. $2x + y = z + 12$

2. Himpunan penyelesaian dari persamaan linear dua variabel $2x + y = 5$, jika x dan y anggota himpunan bilangan cacah adalah ....
   a. {(0, 5), (1, 3), (2, 1)}
   b. {(5, 0), (3, 1), (1, 2)}
   c. {(0, 5), (1, 3), (2, 2)}
   d. {(0, 6), (1, 3), (2, 1)}

3. Pada sistem persamaan $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$, bilangan 3 dan 4 dinamakan ....
   a. variabel
   b. konstanta
   c. koefisien
   d. bilangan bulat

4. Berdasarkan grafik di samping, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel tersebut adalah ....
   a. {(0, 4)}
   b. {(4, 0)}
   c. {(2, 2)}
   d. {(0, -2)}

5. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel $\begin{cases} x + y = -4;\ x,y \in R \\ 2x - y = 1;\ x,y \in R \end{cases}$ adalah ....
   a. {(-1, -3)}
   b. {(1, 3)}
   c. {(1, -3)}
   d. {(-1, 3)}

6. Salah satu himpunan penyelesaian dari SPLDV $\begin{cases} 2x + ay = 6;\ x,y \in R \\ 2x + 3y = 2;\ x,y \in R \end{cases}$ adalah y = 4. Nilai koefisien a adalah ....
   a. 5
   b. 4
   c. 3
   d. 2

7. Salah satu himpunan penyelesaian dari SPLDV $\begin{cases} 3x - 6y = 18;\ x,y \in R \\ bx + 3y = 5;\ x,y \in R \end{cases}$ adalah x = 4. Nilai koefisien b adalah ....
   a. 2
   b. 3
   c. 4
   d. 5

8. Himpunan penyelesaian dari SPLDV $\begin{cases} 3x - 5y = 2; x,y \in R \\ 7x + 3y = 12; x,y \in R \end{cases}$ adalah ....

a. {(½ , 1½)}
b. {(1½, ½)}
c. {(-½ , 1½)}
d. {(½ , -1½)}

9. Jika $3x + 4y = -10$ dan $4x - 5y = -34$ maka nilai dari $8x + 3y$ adalah ....

a. -54
b. -42
c. 42
d. 54

10. Nilai $2x - 7y$ pada sistem persamaan linear $\begin{cases} -3x + y = -1; x,y \in R \\ 3x + 4y = 11; x,y \in R \end{cases}$ adalah ....

a. 16
b. -12
c. -16
d. 12

11. Keliling suatu persegi panjang adalah 100 cm. Jika panjangnya 10 cm lebihnya dari lebarnya maka lebar persegi panjang tersebut adalah ....

a. 30 cm
b. 20 cm
c. 25 cm
d. 15 cm

12. Jumlah dua bilangan adalah 45. Jika diketahui selisih bilangan pertama dengan dua kali bilangan kedua adalah 15 maka bilangan pertama dan kedua berturut-turut adalah ....

a. 35 dan 10
b. 30 dan 15
c. 25 dan 20
d. 15 dan 20

13. Harga 3 kg apel dan 2 kg jeruk adalah Rp 28.000,00. Jika harga 2 kg apel dan 5 kg jeruk adalah Rp 37.000,00, maka harga per kilogram apel dan jeruk adalah ....

a. Rp 6.000,00 dan Rp 5.000,00
b. Rp 7.000,00 dan Rp 4.500,00
c. Rp 7.500,00 dan Rp 4.000,00
d. Rp 8.000,00 dan Rp 4.000,00

14. Harga 4 buah buku dan 3 buah pensil adalah Rp 2.500,00. Jika harga 2 buah buku dan 7 pensil adalah Rp 2.900,00 maka harga 2 lusin buku dan 4 lusin pensil adalah ....

a. Rp 23.500,00
b. Rp 24.000,00
c. Rp 27.000,00
d. Rp 29.500,00

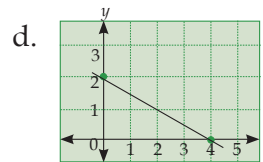
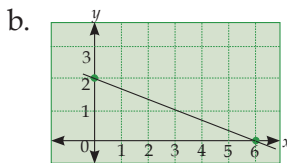
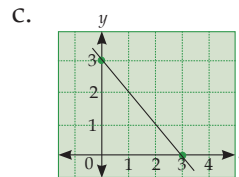
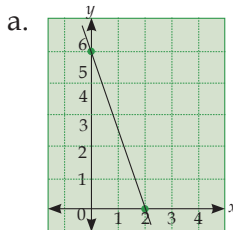
15. Harga 8 buah buku tulis dan 6 buah pensil adalah Rp 14.400,00. Harga 6 buah buku tulis dan 5 buah pensil adalah Rp 11.200,00. Jumlah harga 5 buah buku dan 8 buah pensil adalah ....

a. Rp 13.600,00
b. Rp 12.800,00
c. Rp 12.400,00
d. Rp 11.800,00

16. Harga 2 buah jambu dan 5 buah sawo adalah Rp 6.400,00. Harga 5 buah jambu dan 3 buah sawo Rp 8.400,00. Uang kembalian yang Ita peroleh jika ia membayar Rp 15.000,00 untuk 7 buah jambu dan 4 buah sawo adalah ....

a. Rp 3.400,00
b. Rp 8.800,00
c. Rp 11.600,00
d. Rp 12.600,00

17. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) $x + 2y = 8$, jika x dan y merupakan anggota dari himpunan bilangan cacah adalah ....
    a. {(0, 4), (2, 3), (4, 2), (6, 1), (8, 0)}
    b. {(0, 4), (2, 3), (4, 2), (6, 2), (8, 0)}
    c. {(4, 0), (3, 2), (2, 4), (1, 6), (0, 8)}
    d. {(0, 4), (2, 3), (2, 4), (6, 2), (8, 0)}

18. Grafik dari himpunan penyelesaian $3x + y = 9$ adalah ....

    a.
    c.
    b.
    d.
19. Jumlah dua kali bilangan pertama dengan tiga kali bilangan kedua adalah 50. Sedangkan selisih antara kedua bilangan tersebut sama dengan 5. Maka kedua bilangan tersebut adalah ....
    a. 12 dan 7
    b. 10 dan 15
    c. 7 dan 12
    d. 15 dan 35

20. Koordinat titik potong dari persamaan garis $x + 2y = 8$ dan $2x + y = 7$ adalah ....
    a. (3, 2)
    b. (2, 3)
    c. (4, 2)
    d. (6, 1)

B. Selesaikan soal-soal berikut ini!

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 3x + 2y = 29; x,y \in R \\ x + 2y = 15; x,y \in R \end{cases}$ dengan menggunakan metode grafik!

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} x + 2y = 7; x,y \in R \\ 2x + 3y = 10; x,y \in R \end{cases}$ dengan menggunakan metode substitusi!

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 3x - 5y = 9; x,y \in R \\ 4x - 7y = 13; x,y \in R \end{cases}$ dengan menggunakan metode eliminasi!

4. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 3x - 6y = 18; x,y \in R \\ 2x + 3y = 5; x,y \in R \end{cases}$ dengan menggunakan metode campuran!

5. Dalam pemutaran film di sebuah bioskop hadir 150 penonton. Harga karcis di kursi bagian depan adalah Rp 20.000,00 sedangkan harga karcis di kursi

bagian belakang adalah Rp 15.000,00. Jika uang hasil pemutaran film tersebut adalah Rp 2.500.000,00, tentukanlah:

a. Model matematika dari permasalahan tersebut!
b. Banyaknya penonton di kursi bagian depan dan banyaknya penonton di kursi bagian belakang!

6. Sepertiga uang Winda ditambah dengan uang Erma adalah Rp 50.000,00. Jika uang Winda ditambah uang Erma adalah Rp 90.000,00. Tentukan besar uang Winda dan Erma!
7. Lima tahun yang lalu umur Rulli adalah 6 kali umur Chevi. Jumlah dua kali umur Rulli dengan tiga kali umur Chevi sama dengan 100 tahun. Tentukanlah:
   a. Model matematika dari permasalahan tersebut
   b. Umur Rulli dan umur Chevy 7 tahun yang akan datang

KUNCI JAWABAN BAB 4

A. Pilihan Ganda

1. d
3. b
5. a
7. a
9. b
11. b
13. a
15. c
17. a
19. c

B. Uraian

1. HP = {(7, 4)}
3. HP = {(-2, -3)}
5. a. Model matematikanya

$$\begin{cases} x + y = 150; & x,y \in R \\ 20.000x + 15.000y = 2.500.000; & x,y \in R \end{cases}$$

   b. Penonton bagian depan = 50 orang
   Penonton bagian belakang = 100 orang

7. a.

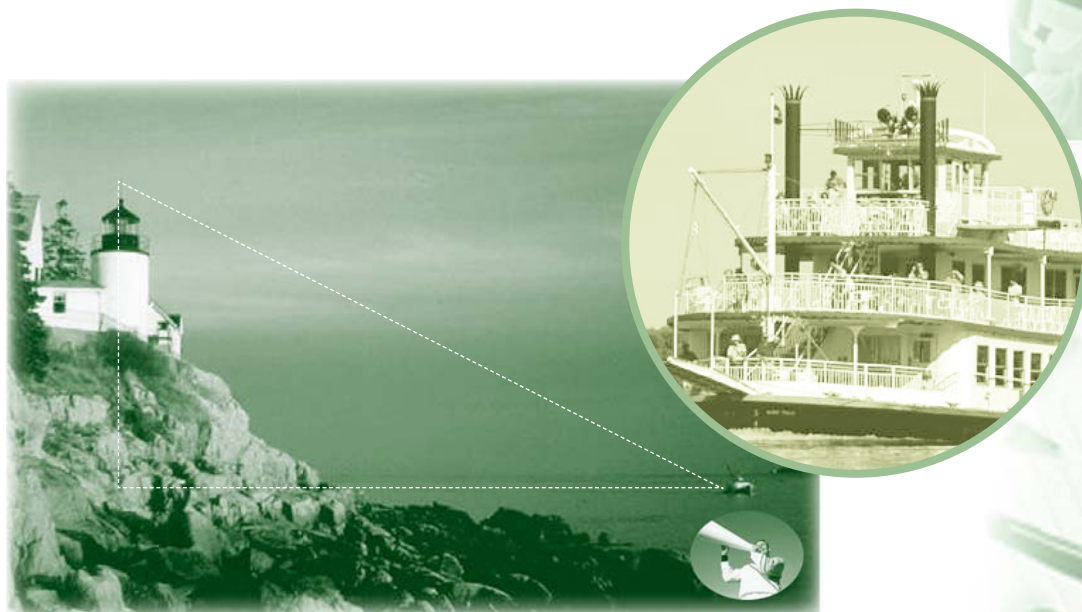
$$\begin{cases} 2x + 3y = 100; & x,y \in R \\ x - 6y = -25 & x,y \in R \end{cases}$$

   b. Umur Rulli = 42 tahun
   Umur Chevy = 17 tahun

Bab

Dalil Pythagoras

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini siswa diharapkan mampu:
- Menjelaskan dan menemukan dalil Pythagoras, dan syarat berlakunya;
- Menuliskan dalil Pythagoras untuk sisi-sisi segitiga;
- Menghitung panjang sisi segitiga siku-siku jika sisi lainnya diketahui;
- Menentukan jenis segitiga jika diketahui panjang sisi-sisinya;
- Menghitung perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku khusus;
- Menghitung panjang diagonal sisi dan ruang kubus dan balok;
- Menerapkan dalil Pythagoras.

Seorang nakhoda kapal melihat puncak mercusuar yang berjarak 80 meter dari kapal. Jika diketahui tinggi mercusuar adalah 60 meter dari permukaan laut, dapatkah kalian menentukan jarak nakhoda dari puncak mercusuar tersebut?

Persoalan di atas dapat kita hitung dengan menggunakan prinsip segitiga siku-siku. Jika panjang dua sisi segitiga siku-siku kita ketahui, maka sisi yang lain dapat kita tentukan. Caranya adalah dengan menggunakan dalil Pythagoras.

Peta konsep

Dalil Pythagoras
A. Dalil Pythagoras
1. Kuadrat dan akar kuadrat bilangan
2. Luas daerah persegi
3. Luas daerah segitiga
B. Menemukan dalil Pythagoras
C. Menggunakan dalil Pythagoras
1. Menghitung panjang salah satu sisi segitiga siku-siku
2. Menentukan jenis segitiga jika diketahui panjang sisi-sisinya
3. Menghitung perbandingan sisi-sisi segitiga khusus
4. Menentukan panjang diagonal sisi dan diagonal ruang kubus
D. Menyelesaikan soal cerita yang berhubungan dengan dalil Pythagoras

A Dalil Pythagoras

Dalam dalil Phytagoras melibatkan bilangan kuadrat dan akar kuadrat dalam sebuah segitiga. Oleh karena itu, sebelum membahas dalil Pythagoras, marilah kita mengingat kembali materi kuadrat bilangan, akar kuadrat bilangan, luas daerah persegi, dan luas daerah segitiga siku-siku.

1 Kuadrat dan Akar Kuadrat Bilangan

Masih ingatkah kalian bagaimana menentukan kuadrat dari suatu bilangan? Untuk menentukan kuadrat dari suatu bilangan adalah dengan cara mengalikan bilangan tersebut dengan dirinya sendiri. Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Tentukan kuadrat dari bilangan berikut!

a. 8,3 b. 12 c. 21

Penyelesaian:

a. $8{,}3^2 = 8{,}3 \times 8{,}3 = 68{,}89$

b. $12^2 = 12 \times 12 = 144$

c. $21^2 = 21 \times 21 = 441$

Kebalikan dari kuadarat suatu bilangan adalah akar kuadrat. Misalkan, bilangan p yang tak negatif diperoleh $p^2 = 16$. Maka bilangan p dapat ditentukan dengan menarik $\sqrt{16}$ menjadi $p = \sqrt{16}$. Bilangan p yang diinginkan adalah 4 karena $4^2 = 4 \times 4 = 16$. Bilangan $p = 4$ dinamakan akar kuadrat dari bilangan 16.

Jadi, akar kuadrat suatu bilangan adalah bilangan tak negatif yang apabila dikuadratkan akan menghasilkan bilangan yang sama dengan bilangan semula. Perhatikan contoh berikut!

Contoh

Tentukan akar kuadrat dari bilangan berikut:

a. $\sqrt{68{,}89}$ b. $\sqrt{144}$ c. $\sqrt{441}$

Penyelesaian:

a. $\sqrt{68{,}89} = \sqrt{8{,}3} \times \sqrt{8{,}3} = 8{,}3$

b. $\sqrt{144} = \sqrt{12} \times \sqrt{12} = 12$

c. $\sqrt{441} = \sqrt{21} \times \sqrt{21} = 21$

2 Luas Daerah Persegi

Masih ingatkah kalian cara menentukan luas bangun datar persegi? Luas persegi dapat ditentukan dengan cara mengalikan sisi-sisinya. Jika sisi sebuah persegi adalah s maka luasnya dapat dituliskan sebagai berikut.

$$L = s \times s = s^2$$

Contoh

Tentukan luas persegi jika diketahui sisi-sisinya berukuran 21 cm!

Penyelesaian:

$L = s^2$

$= 21 \text{ cm} \times 21 \text{ cm}$

$= 441 \text{ cm}^2$

Jadi luas persegi adalah 441 cm^2.

3 Luas Daerah Segitiga

Kalian tentu sudah mempelajari cara menghitung luas dan keliling segitiga. Pada bab ini kalian akan mempelajari hubungan antara luas segitiga dengan luas persegi panjang.

Perhatikan gambar persegi panjang PQRS berikut!

S R P Q

Dari persegi panjang tersebut kita memperoleh dua buah segitiga, yaitu ΔPQR dan ΔPSR.

Luas ΔPQR = luas daerah ΔPSR.

Hal ini menunjukkan bahwa

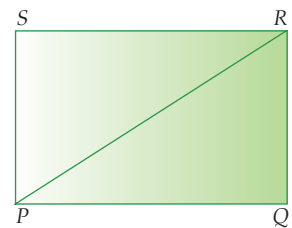
Luas $\Delta PQR = \frac{1}{2} \times$ luas $PQRS$

$= \frac{1}{2} \times$ panjang $PQ \times$ panjang QR

$= \frac{1}{2} \times$ alas $\times$ tinggi

Jadi, luas segitiga dirumuskan:

$$L = \frac{1}{2} \times a \times t$$

dengan a = alas segitiga, dan t = tinggi segitiga

Contoh

Tentukan luas segitiga jika diketahui alasnya berukuran 12 cm dan tingginya 5 cm!

Penyelesaian:

$$L = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$$

$$= 30 \text{ cm}^2$$

Jadi luas segitiga adalah 30 cm^2.

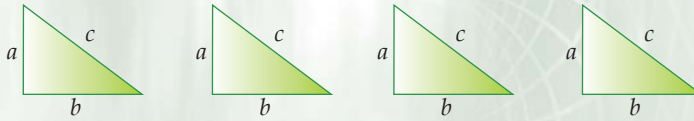
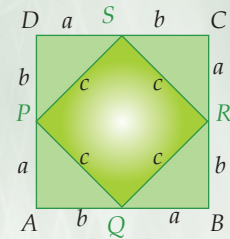
Latihan Soal

1. Tentukan kuadrat dari bilangan berikut ini!
   a. 4
   b. 11
   c. 17
   d. 16,5
   e. 20
   f. 14,5
   g. 0,25
   h. 36,8
   i. 0,17
   j. 42
2. Tentukan akar kuadrat dari bilangan berikut!
   a. 16
   b. 128
   c. 0,16
   d. 729
   e. 0,09
   f. 196
   g. 81
   h. 1,69
   i. 1024
   j. 2500
3. Tentukan luas segitiga jika diketahui;
   a. alas = 8 cm , tinggi = 7 cm
   b. alas = 10 cm, tinggi = 6 cm
   c. alas = 6 cm, tinggi = 12 cm
   d. alas = 9 cm, tinggi = 14 cm
   e. alas = 15 cm, tinggi = 12 cm

B Menemukan Dalil Pythagoras

Luas persegi dan segitiga yang dibahas pada bagian sebelumnya dapat digunakan untuk menenemukan dalil Pythagoras. Untuk menemukan dalil Pythagoras lakukanlah kegiatan berikut ini!

Tugas

- Buatlah segitiga siku-siku dari kertas warna dengan panjang sisi-sisinya tertentu. Misalkan panjang sisi siku-sikunya adalah a dan b dengan sisi miring c sebanyak 4 buah

- Susunlah keempat segitiga tersebut sehingga terbentuk persegi yang panjang sisinya $(a + b)$. Perhatikan gambar di samping!

- Luas ☐ $PQRS$ = Luas ☐ $ABCD$ – 4 × Luas segitiga

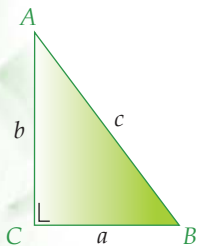
  Luas ☐ $PQRS$ = ... × .... = c^2

  Luas ☐ $ABCD$ = $(\ldots + \ldots)^2 = \ldots^2 + 2ab + \ldots^2$

  4 × Luas segitiga = $4 \times \left(\frac{1}{2} \times \ldots \times \ldots\right) = 2ab$

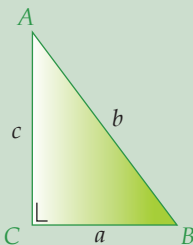
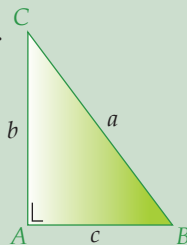
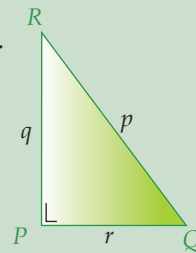
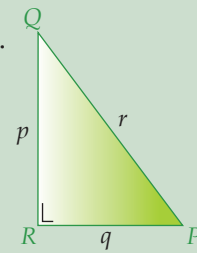
- Luas ☐ $PQRS$ = Luas ☐ $ABCD$ – 4 × Luas segitiga

  $c^2 = \ldots.^2 + 2ab + \ldots^2 - 2ab$

Berdasarkan kegiatan di atas kalian akan memperoleh sifat segitiga siku-siku, yaitu *pada setiap segitiga siku-siku, kuadrat sisi miring sama dengan jumlah kuadrat sisi siku-sikunya*. Sifat inilah yang kemudian dikenal dengan *dalil Pythagoras*. Jadi, jika ABC adalah sembarang segitiga siku-siku dengan panjang sisi siku-siku a dan b serta panjang sisi miring c maka berlaku hubungan sebagai berikut:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Latihan Soal

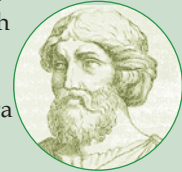
Tentukanlah rumus Pythagoras dari setiap segitiga siku-siku pada soal berikut ini!

1.

2.

3.

4.

C Menggunakan Dalil Pythagoras

Dengan menggunakan dalil Pythagoras, kalian dapat menentukan panjang salah satu sisi segitiga siku-siku jika diketahui dua sisi yang lainnya. Selain itu, dalil ini dapat digunakan juga untuk menentukan jenis segitiga dengan membandingkan kuadrat sisi miringnya dengan jumlah kuadrat sisi siku-sikunya.

Tokoh

Dalil Pythagoras merupakan salah satu dalil yang paling sering digunakan secara luas. Dalil ini pertama kali ditemukan oleh Pythagoras, seorang ahli matematika bangsa Yunani yang hidup pada abad keenam Masehi.

(Sumber: www.e-dukasi.net)

1 Menghitung Panjang Salah Satu Sisi Segitiga Siku-Siku

Pada sebuah segitiga siku-siku, jika dua buah sisinya diketahui maka salah satu sisinya dapat dicari dengan menggunakan dalil Pythagoras. Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Panjang sisi miring suatu segitiga siku-siku adalah 15 cm. Jika panjang salah satu sisi siku-sikunya 9 cm, tentukan panjang sisi segitiga siku-siku yang lainnya!

Penyelesaian:

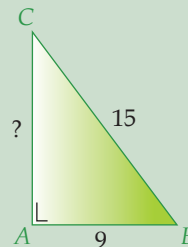
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$AC^2 = BC^2 - AB^2$

$= 15^2 - 9^2 = 225 - 81$

$= 144$

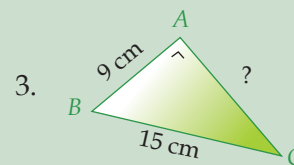
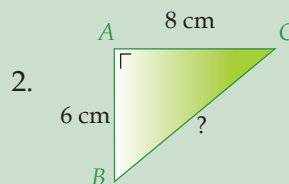
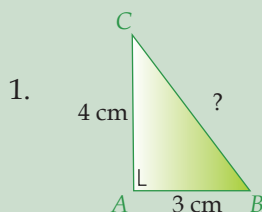
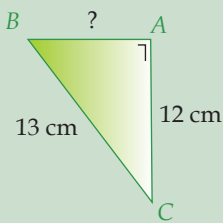
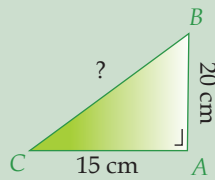
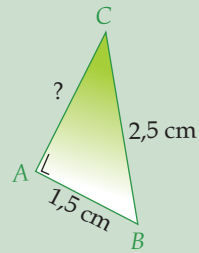
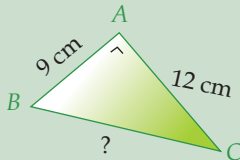
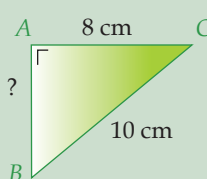
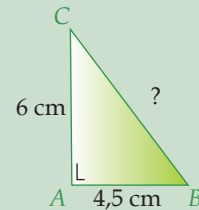
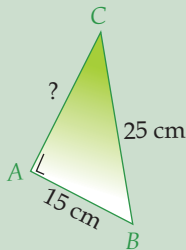
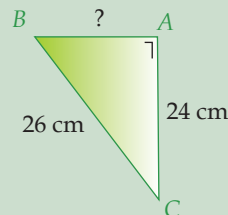
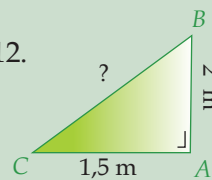
$AC = \sqrt{144} = 12$ cm

Jadi, panjang sisi segitiga siku-siku yang lainnya (AC)=12 cm.

Latihan Soal

Hitunglah panjang sisi segitiga siku-siku yang belum diketahui pada gambar berikut!

1.

2.

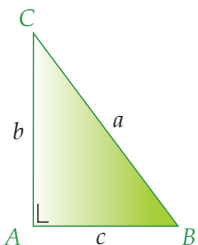
3.

2 Menentukan Jenis Segitiga Jika Diketahui Panjang Sisi-Sisinya

Dalil Pythagoras dapat digunakan untuk menentukan jenis segitiga jika diketahui panjang sisi-sisinya. Namun demikian, sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu mengenai kebalikan dari dalil Pythagoras.

a. Kebalikan Dalil Pythagoras

Pada bahasan sebelumnya telah dijelaskan bahwa kuadrat miring (*hypothenusa*) atau sisi miring suatu segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat panjang kedua sisinya. Dari pernyataan tersebut kita peroleh kebalikan dari dalil Pythagoras, yaitu:

- Jika kuadrat sisi miring atau sisi terpanjang sebuah segitiga sama dengan jumlah kuadrat panjang kedua sisinya, maka segitiga tersebut merupakan segitiga siku-siku, atau
- Jika pada suatu segitiga berlaku $a^2 = b^2 + c^2$, maka segitiga ABC tersebut merupakan segitiga siku-siku dengan besar salah satu sudutnya 90°.

C
a
b
A c B

Contoh

Suatu segitiga ABC mempunyai panjang AB = 10 cm, BC = 24 cm, dan AC = 26 cm. Tentukan apakah segitiga tersebut termasuk segitiga siku-siku atau bukan!

Penyelesaian:

$AB = 10$, maka $AB^2 = 100$

$BC = 24$, maka $BC^2 = 576$

$AC = 26$, maka $AC^2 = 676$

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh hubungan bahwa $676 = 100 + 576$.

Sehingga $AC^2 = AB^2 + BC^2$

Jadi segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku.

b. Menentukan jenis segitiga jika diketahui panjang sisi-sisinya

Bagaimana menentukan jenis segitiga jika diketahui panjang sisi-sisinya dengan menggunakan dalil Pythagoras? Coba kalian perhatikan contoh berikut ini.

Contoh

Suatu segitiga panjang sisi-sisinya diketahui adalah 6 cm, 12 cm, dan 15 cm. Tentukanlah jenis segitiga tersebut!

Penyelesaian:

$$15^2 = 15 \times 15 = 225$$

$$6^2 + 12^2 = 36 + 144 = 190$$

Karena $15^2 > 6^2 + 12^2$ maka jenis segitiganya adalah segitiga tumpul.

Berdasarkan contoh di atas, dapatkah kalian menentukan jenis segitiga jika diketahui panjang sisi-sisinya? Jika kalian belum memahaminya dengan baik, lakukanlah kegiatan berikut ini.

Tugas

- Buatlah sebuah segitiga dari lidi yang panjangnya masing-masing 9 cm, 12 cm, dan 15 cm!
  - Sebutkan jenis segitiga yang terbentuk !
  - Bagaimana hubungan antara ketiga sisinya?

- Buatlah sebuah segitiga dari lidi yang panjangnya 12 cm, 13 cm, dan 15 cm!
  - Sebutkan jenis segitiga yang terbentuk !
  - Bagaimana hubungan antara ketiga sisinya?
- Buatlah sebuah segitiga dari lidi yang panjangnya 10 cm, 7 cm, dan 9 cm!
  - Sebutkan jenis segitiga yang terbentuk !
  - Bagaimana hubungan antara ketiga sisinya?

Berdasarkan kegiatan tersebut kalian akan menemukan hubungan panjang sisi-sisi sebuah segitiga dengan jenis segitiganya. Misalkan sisi terpanjang dari segitiga tersebut adalah *c* dan panjang sisi yang lainnya adalah *a* dan *b*, maka berlaku hubungan sebagai berikut.

➢ Jika kuadrat sisi terpanjang sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi lainnya maka segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

➢ Jika kuadrat sisi terpanjang lebih besar dari jumlah kuadrat sisi-sisi lainnya maka segitiga tersebut adalah segitiga tumpul.

$$c^2 > a^2 + b^2$$

➢ Jika kuadrat sisi terpanjang lebih kecil dari jumlah kuadrat sisi-sisi lainnya maka segitiga tersebut adalah segitiga lancip.

$$c^2 < a^2 + b^2$$

c. Tripel Pythagoras

Bilangan-bilangan 3, 4, dan 5 serta 6, 8, dan 10 merupakan bilangan-bilangan yang memenuhi dalil Pythagoras, yaitu $5^2 = 3^2 + 4^2$ dan $10^2 = 6^2 + 8^2$. Bilangan-bilangan tersebut dapat dipandang sebagai panjang sisi sebuah segitiga siku-siku. Bilangan-bilangan yang memenuhi dalil Pythagoras seperti itu disebut *tripel Pythagoras*. Jadi, tripel Pythagoras adalah bilangan bulat positif yang kuadrat bilangan terbesarnya sama dengan jumlah kuadrat bilangan yang lainnya.

Math Info

Salah satu bilangan yang termasuk bilangan tripel Pythagoras adalah 3, 4, dan 5. Ketiga bilangan tersebut dianggap sebagai angka ajaib dan mistik bagi kaum Mesir kuno. Karenanya, angka-angka tersebut dijadikan dasar pengukuran untuk membentuk sudut siku-siku. (*Sumber: www.e-dukasi.net*)

Contoh

Tentukan apakah bilangan berikut termasuk tripel Pythagoras atau bukan!

a. 12, 9, 15 b. 8, 10, 18

Penyelesaian:

a. $15^2 = 225$

$12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$

$15^2 = 12^2 + 9^2$

b. $13^2 = 169$

$8^2 + 10^2 = 64 + 100 = 164$

$13^2 \neq 8^2 + 10^2$

Jadi, a. 12, 9, 15 termasuk bilangan tripel Pythagoras.

b. 8, 10, 13 bukan bilangan tripel Pythagoras.

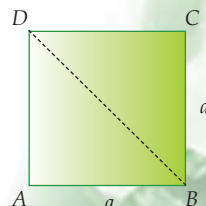
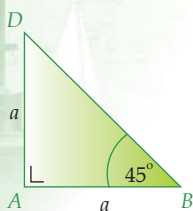
Latihan Soal

1. Tentukan apakah segitiga yang panjang sisinya berikut ini termasuk segitiga siku-siku atau bukan!
   a. 12 cm, 13 cm, 5 cm
   b. 13 cm, 7 cm, 14 cm
   c. 8 cm, 15 cm, 17 cm
   d. 7 cm, 24 cm, 25 cm
   e. 6 cm, 6 cm, 6 cm
2. Tentukan jenis segitiga jika diketahui panjang sisi-sisinya sebagai berikut!
   a. 9 cm, 12 cm, 15 cm
   b. 5 cm, 8 cm, 12 cm
   c. 9 cm, 13 cm, 17 cm
   d. 8 cm, 15 cm, 20 cm
   e. 7 cm, 24 cm, 25 cm
3. Tentukan apakah bilangan asli berikut termasuk tripel Pythagoras atau bukan!
   a. 12, 16, 20
   b. 7, 8, 11
   c. 5, 3, 2
   d. 6, 8, 10
   e. 8, 15, 17

3 Menghitung Perbandingan Sisi-Sisi Segitiga Khusus

Segitiga siku-siku merupakan segitiga yang salah satu sudutnya membentuk sudut 90°. Bagaimana menghitung perbandingan sisi-sisi segitiga yang memiliki ciri khusus seperti segitiga siku-siku, sama kaki, dan segitiga siku-siku yang salah satu sudutnya 30°? Perhatikan penjelasan berikut ini!

a. Segitiga siku-siku sama kaki

Segitiga siku-siku sama kaki diperoleh dengan cara membagi sebuah persegi melalui diagonalnya menjadi dua bagian. Perhatikan persegi *ABCD* yang panjang sisinya *a* seperti pada gambar di samping! Jika bangun persegi tersebut dibagi dua

melalui diagonal BD, maka akan diperoleh dua buah segitiga siku-siku sama kaki yaitu ΔBAD *dan* ΔBCD. Besar sudut *ABD* adalah 45°. Jelaskan mengapa?

Dengan menggunakan dalil Pythagoras kalian dapat menentukan panjang sisi *BD* yang belum diketahui. Berdasarkan dalil Pythagoras diperoleh hubungan sebagai berikut.

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$
$$\Leftrightarrow \quad BD^2 = a^2 + a^2$$
$$\Leftrightarrow \quad BD^2 = 2a^2$$
$$\Leftrightarrow \quad BD = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

Dengan demikian kita dapat membandingkan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku *BAD* sebagai berikut.

- $AB : BD = a : a\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$
- $AD : BD = a : a\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$
- $AB : AD = a : a = 1 : 1$
- $AB : AD : BD = a : a : a\sqrt{2} = 1 : 1 : \sqrt{2}$

Contoh

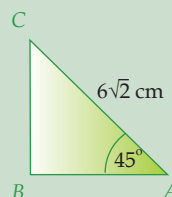
Diketahui segitiga *ABC* siku-siku di *B* dengan panjang sisi *AC* $6\sqrt{2}$ cm. Jika $\angle BAC = 45°$, tentukan panjang sisi *AB* dan *BC*!

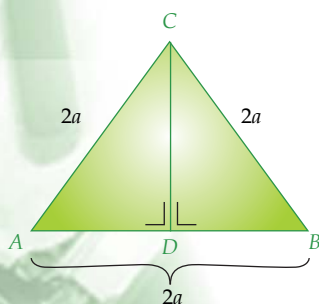
Penyelesaian:

$AB : AC = 1 : \sqrt{2}$

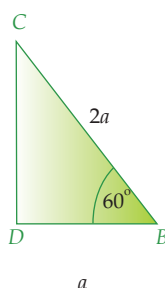
$\Leftrightarrow \quad \dfrac{AB}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \quad AB = 6 \times 1 = 6$

$BC : AB = 1 : 1$ maka $BC = AB = 6$ cm
Jadi, panjang $AB = BC = 6$ cm.

b. Segitiga siku-siku yang salah satu sudutnya 30°

Segitiga siku-siku yang salah satu sudutnya membentuk sudut 30° diperoleh dengan cara membagi sebuah segitiga sama sisi menjadi dua bagian. Perhatikan segitiga *ABC* di samping!

Jika kita membagi dua segitiga sama sisi di samping menjadi dua bagian yang sama besar maka akan diperoleh segitiga *BDC* siku-siku di *D* dan segitiga *ADC* siku-siku di *D*. Besar $\angle DBC = 60°$ karena segitiga *ABC* adalah segitiga sama sisi. Besar $\angle BCD = 30°$. Jelaskan mengapa?

Dengan menggunakan dalil Pythagoras kalian dapat menentukan panjang sisi CD yang belum diketahui. Berdasarkan dalil Pythagoras diperoleh hubungan sebagai berikut.

$$BC^2 = BD^2 + CD^2$$
$$\Leftrightarrow CD^2 = BC^2 - BD^2$$
$$\Leftrightarrow CD^2 = (2a)^2 - a^2$$
$$\Leftrightarrow CD^2 = 4a^2 - a^2$$
$$\Leftrightarrow CD^2 = 3a^2$$
$$\Leftrightarrow CD = \sqrt{3a^2}$$
$$= a\sqrt{3}$$

Dengan demikian kita dapat membandingkan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku BDC sebagai berikut.

- $BD : BC = a : 2a$
  $= 1 : 2$
- $CD : BC = a\sqrt{3} : 2a$
  $= \sqrt{3} : 2$
- $BD : CD = a : a\sqrt{3}$
  $= 1 : \sqrt{3}$
- $BD : CD : BC = a : a\sqrt{3} : 2a = 1 : \sqrt{3} : 2$

Contoh

Diketahui segitiga ABC siku-siku di A dengan panjang sisi AB 4 cm. Jika $\angle BCA = 30^\circ$, tentukan panjang sisi BC dan AC!

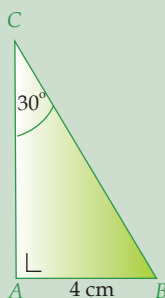
Penyelesaian:

$AB : BC = 1 : 2$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{BC} = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow BC = 4 \times 2 = 8$$

$AB : AC = 1 : \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

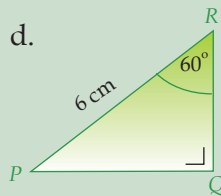
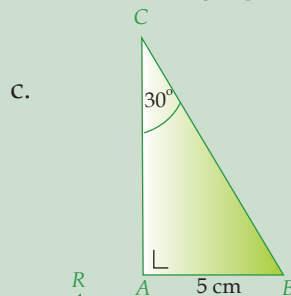
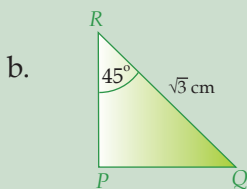
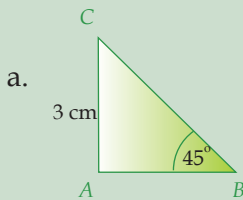
Jadi, panjang sisi BC = 8 cm dan $AC = 4\sqrt{3}$ cm.

Latihan Soal

1. Hitunglah panjang sisi-sisi yang belum diketahui pada segitiga berikut!

a.

c.

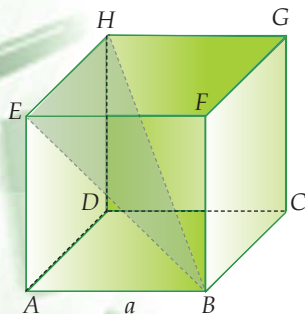
b.

d.

2. Diketahui segitiga ABC siku-siku di B dengan panjang sisi AC adalah $5\sqrt{2}$ cm. Jika $\angle BAC = 45^\circ$, tentukan panjang sisi AB dan BC!

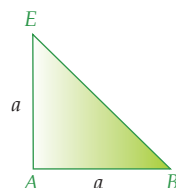
3. Diketahui segitiga PQR siku-siku di Q dengan panjang sisi PQ 8 cm. Jika $\angle QRP = 30^\circ$, tentukan panjang sisi QR dan PR!

4 Menentukan Panjang Diagonal Sisi dan Diagonal Ruang Kubus

Dalil Pythagoras dapat digunakan untuk mencari panjang diagonal sisi atau diagonal ruang kubus dan balok. Hal ini dikarenakan diagonal sisi dan diagonal ruang merupakan sisi miring bagi sisi bidangnya.

Perhatikan gambar kubus *ABCD.EFGH* di samping!

Pada kubus *ABCD.EFGH* rusuk *EB* merupakan salah satu diagonal sisi pada kubus dan rusuk *HB* merupakan salah satu diagonal ruangnya. Jika panjang sisi kubus *ABCD.EFGH* adalah *a* satuan panjang maka kita dapat menentukan panjang rusuk *EB* dan *HB*.

Untuk menentukan panjang diagonal sisi *EB*, perhatikan segitiga siku-siku *ABE* pada kubus *ABCD.EFGH*. Berdasarkan dalil Pythagoras diperoleh hubungan sebagai berikut.

$$EB^2 = AB^2 + AE^2$$

$\Leftrightarrow \quad EB^2 = a^2 + a^2$

$\Leftrightarrow \quad EB^2 = 2a^2$

$\Leftrightarrow \quad EB = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

Jadi, panjang diagonal sisi sebuah kubus yang panjang sisinya a adalah $a\sqrt{2}$.

Untuk menentukan panjang diagonal ruang HB, perhatikan segitiga BDH yang siku-siku di D. Karena rusuk BD merupakan diagonal sisi kubus $ABCD.EFGH$, maka panjangnya adalah $a\sqrt{2}$. Dengan menggunakan dalil Pythagoras diperoleh hubungan berikut.

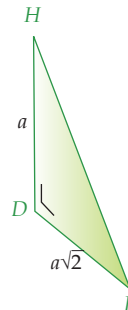
$HB^2 = DB^2 + DH^2$

$\Leftrightarrow \quad HB^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$

$\Leftrightarrow \quad HB^2 = 2a^2 + a^2$

$\Leftrightarrow \quad HB^2 = 3a^2$

$\Leftrightarrow \quad HB = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

Jadi, panjang diagonal ruang sebuah kubus yang panjang sisinya a satuan adalah $a\sqrt{3}$.

Contoh

Tentukan diagonal sisi dan diagonal ruang jika diketahui panjang rusuk kubus adalah 8 cm!

Penyelesaian:

Diagonal sisi = $8\sqrt{2}$ cm

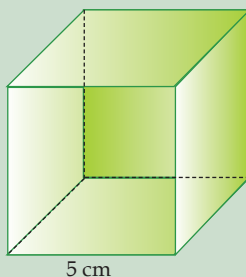
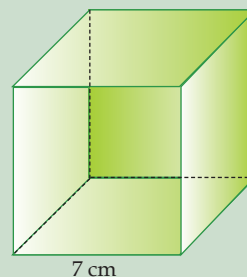
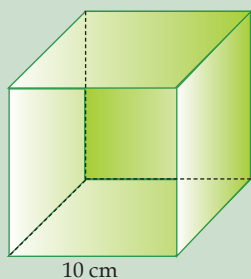
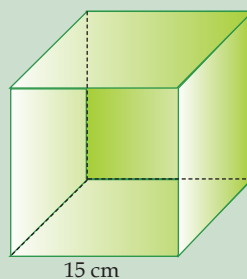
Diagonal ruang = $8\sqrt{3}$ cm

Latihan Soal

1. Tentukanlah diagonal sisi dan diagonal ruang pada kubus berikut ini!

a.

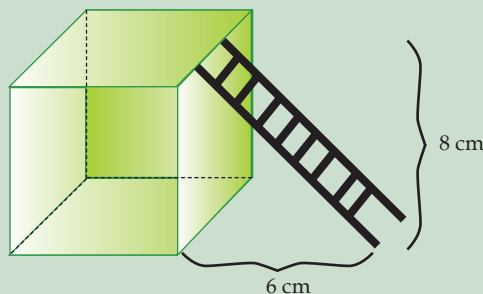
b.

7 cm

c.

d.

2. Diketahui volume sebuah kubus adalah 216 cm^3. Tentukan panjang diagonal sisi dan diagonal ruang kubus tersebut!
3. Kubus *PQRS.TUVW* memiliki luas permukaan 486 cm^2. Tentukan panjang diagonal sisi dan diagonal ruang kubus *PQRS.TUVW!*

D Menyelesaikan Soal Cerita yang Berhubungan dengan Dalil Pythagoras

Pada bagian sebelumnya kalian telah mempelajari bagaimana menggunakan dalil Pythagoras untuk menentukan jenis segitiga dan panjang diagonal ruang serta diagonal sisi sebuah kubus. Lalu bagaimana jika ditemukan soal cerita yang berhubungan dengan dalil Pythagoras? Agar mudah dalam menyelesaikannya, buatlah sketsa gambar dari soal yang dimaksud. Setelah itu, kalian gunakan dalil Pythagoras untuk menyelesaikan permasalahannya. Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh

Sebuah tangga bersandar pada tembok yang tingginya 8 m. Jika kaki tangga terletak 6 m dari dinding, tentukanlah panjang tangga yang bersandar pada tembok tersebut!

Penyelesaian:

Langkah pertama yang kita lakukan adalah menggambarkan situasi dari permasalahan tersebut seperti terlihat pada sketsa di samping ini!

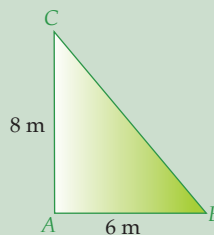
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

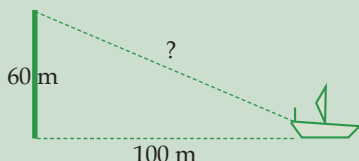
$\Leftrightarrow BC^2 = 6^2 + 8^2$

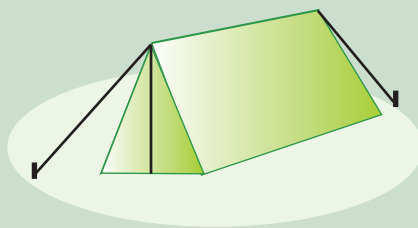
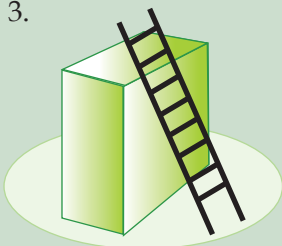
$\Leftrightarrow BC^2 = 36 + 64$

$\Leftrightarrow BC^2 = 100$

$\Leftrightarrow BC = \sqrt{100} = 10$ meter.

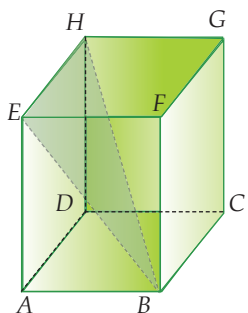
Jadi, panjang tangga tersebut adalah 10 meter.

Latihan Soal

1.

Seorang nakhoda kapal melihat puncak mercusuar yang berjarak 100 meter dari kapal. Jika diketahui tinggi mercusuar 60 meter, tentukan jarak nakhoda dari puncak mercusuar tersebut!

2. Sebuah tenda berdiri menggunakan beberapa tali yang diikatkan ke dasar tanah dari ujung tenda. Jika panjang tali yang digunakan adalah 15 meter dan jarak antara tiang penyangga pada tanah dengan besi yang berdiri tepat di tengah-tengah tenda adalah 12 meter, tentukanlah tinggi tenda tersebut!

3.

Sebuah tangga yang panjangnya 7 meter disandarkan pada sebuah dinding yang tingginya 4 m. Jika kaki tangga itu terletak 3 m dari dinding, tentukanlah panjang bagian tangga yang menonjol di atas dinding!

4. Seorang anak berenang di sebuah kolam yang permukaannya berbentuk persegi panjang dengan panjang 16 m. Jika ia berenang secara diagonal dan menempuh jarak 20 m, tentukanlah lebar kolam renang tersebut!

Otak-Atik Matematika

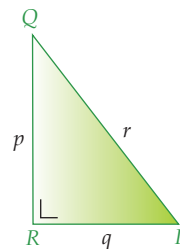
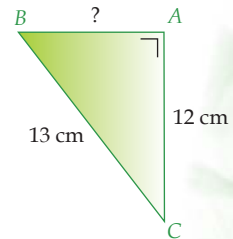
Sebuah balok $ABCD.EFGH$ mempunyai panjang AB = 16 cm, dan $EG = 8\sqrt{5}$ cm. Tinggi balok = 22 cm. Tentukan:

a. Lebar balok
b. Panjang diagonal ruang balok
c. Volume air yang dapat ditampung oleh balok

Rangkuman

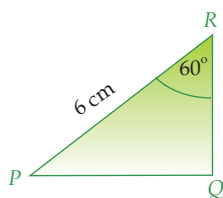
1. Kuadrat suatu bilangan adalah perkalian antara bilangan tersebut dengan dirinya sendiri.
2. Akar kuadrat suatu bilangan adalah bilangan tak negatif yang jika dikuadratkan akan menghasilkan bilangan yang sama dengan bilangan semula.
3. Teorema Pythagoras menyatakan bahwa kuadrat sisi miring pada segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisinya.
4. Menentukan jenis segitiga jika diketahui sisi-sisinya
   a. Jika kuadrat sisi terpanjang sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi lainnya maka segitiga tersebut merupakan segitiga siku-siku.
   b. Jika kuadrat sisi terpanjang lebih kecil dari jumlah kuadrat sisi-sisi lainnya maka segitiga tersebut merupakan segitiga lancip.
   c. Jika kuadrat sisi terpanjang lebih besar dari jumlah kuadrat sisi-sisi lainnya maka segitiga tersebut merupakan segitiga tumpul.
5. Tripel Pythagoras adalah bilangan bulat positif yang kuadrat bilangan terbesarnya sama dengan jumlah kuadrat bilangan yang lainnya.
6. Panjang diagonal sisi kubus yang panjang sisinya a adalah $a\sqrt{2}$.
7. Panjang diagonal ruang kubus yang panjang sisinya a adalah $a\sqrt{3}$.

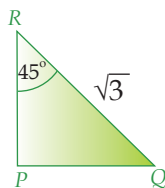
Uji Kemampuan

A. Pilihlah satu jawaban yang paling tepat, a, b, c, atau d! Tuliskan pada lembar jawabanmu!

1. Kuadrat dari bilangan 16 adalah ....
   a. 144 c. 225
   b. 169 d. 256
2. Akar kuadrat dari bilangan 289 adalah ....
   a. 21 c. 17
   b. 20 d. 11
3. Pada segitiga *PQR* berikut berlaku hubungan .....

   a. $p^2 = q^2 + r^2$
   b. $q^2 = p^2 + r^2$
   c. $r^2 = p^2 + q^2$
   d. $p^2 = q^2 - r^2$
4. Panjang sisi miring suatu segitiga siku-siku adalah 15 cm. Jika panjang salah satu sisi siku-sikunya adalah 9 cm, panjang sisi segitiga siku-siku yang lainnya adalah ....
   a. 12 cm c. 16 cm
   b. 14 cm d. 18 cm
5. Panjang sisi *AB* pada segitiga *ABC* di samping adalah ....

   a. 4 cm
   b. 5 cm
   c. 6 cm
   d. 7 cm
6. Suatu segitiga mempunyai ukuran sisi-sisinya 8 cm, 15 cm, dan 20 cm. Segitiga tersebut merupakan jenis segitiga ....
   a. lancip c. siku-siku
   b. tumpul d. sama kaki
7. Suatu segitiga ukuran sisi-sisinya adalah 10 cm, 12 cm, dan 15 cm. Segitiga tersebut merupakan jenis segitiga ....
   a. lancip c. siku-siku
   b. tumpul d. sama kaki
8. Bilangan berikut termasuk tripel Pythagoras, *kecuali* ....
   a. 6, 8, 10 c. 4, 12, 13
   b. 12, 16, 20 d. 9, 12, 15

9. Panjang QR pada segitiga di bawah ini adalah ....

a. 2 cm
b. 3 cm
c. 4 cm
d. 5 cm

10. Panjang PQ pada segitiga PQR berikut adalah ....

a. $\sqrt{\frac{3}{2}}$
b. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
c. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$
d. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

11. Diketahui segitiga ABC siku-siku di B dengan panjang sisi AC $7\sqrt{2}$ cm. Jika $\angle$ BAC = 45^0, panjang sisi AB adalah ....

a. 2 cm	c. 6 cm
b. 4 cm	d. 7 cm

12. Diagonal sisi kubus yang panjang sisinya 5 cm adalah ....

a. $5\sqrt{2}$ cm	c. $2\sqrt{5}$ cm
b. $5\sqrt{3}$ cm	d. 0,5 cm

13. Diagonal ruang kubus yang volumenya adalah 343 cm^3 adalah ....

a. $6\sqrt{2}$ cm	c. $7\sqrt{2}$ cm
b. $6\sqrt{3}$ cm	d. $7\sqrt{3}$ cm

14. Sebuah tiang listrik dapat berdiri tegak jika ditahan dengan tali kawat baja. Jika jarak dari patok pengikat terhadap tiang listrik adalah 4 m dan tinggi tiang listrik 5 meter, maka panjang tali kawat yang dibutuhkan adalah ....

a. $\sqrt{41}$ cm	c. $\sqrt{21}$ cm
b. 3 cm	d. 5 cm

15. Seorang nakhoda kapal melihat puncak mercusuar yang berjarak 80 meter dari kapal. Jika diketahui tinggi mercusuar adalah 60 meter. Jarak nakhoda dari puncak mercusuar adalah ....

a. 75 m	c. 125 m
b. 100 m	d. 150 m

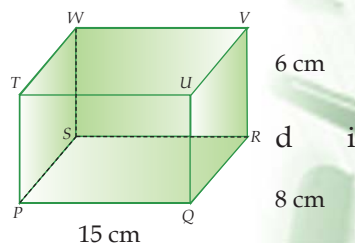
16. Sisi terpendek dan terpanjang suatu segitiga siku-siku adalah 20 cm dan 12 cm. Panjang sisi lainnya adalah ....

a. 16 cm	c. 18 cm
b. 17 cm	d. 19 cm

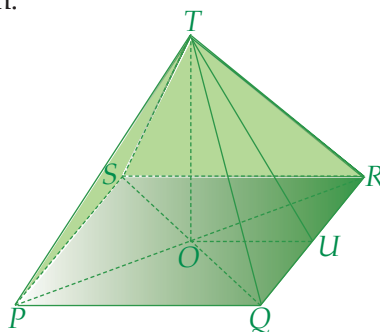
17. Keliling sebuah persegi panjang sama dengan 46 cm. Jika sisi terpanjang lebih 7 cm dari sisi terpendeknya, maka diagonal persegi panjang tersebut adalah ....
    a. 15 cm
    b. 16 cm
    c. 17 cm
    d. 18 cm
18. Perhatikan bilangan-bilangan berikut ini!
    (i) 9, 12, 15
    (ii) 7, 4, $5\sqrt{3}$
    (iii) 2, $2\sqrt{3}$, 4
    (iv) $\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$, 4

    Berdasarkan pernyataan di atas, pasangan bilangan yang dapat membentuk segitiga siku-siku adalah ....
    a. (i) dan (ii)
    b. (i) dan (iii)
    c. (ii) dan (iv)
    d. (ii) dan (iv)
19. Sisi terpendek dan sisi terpanjang suatu segitiga siku-siku adalah 50 cm dan 30 cm. Sisi segitiga lainnya adalah ....
    a. 45
    b. 40
    c. 20
    d. 25
20. Keliling suatu persegi panjang adalah 70 m. Jika lebar persegi panjang 5 m kurangnya dari panjangnya, maka diagonal persegi panjang adalah ....
    a. 10 m
    b. 15 m
    c. 20 m
    d. 25 m

B. Selesaikan soal-soal berikut ini!

1. Dari bilangan-bilangan berikut ini, tentukan mana yang termasuk bilangan tripel Pythagoras! Jelaskan!
   a. 26, 24, 10
   b. 24, 22, 7
   c. 12, 16, 20
   d. 5, 3, 2
   e. 8, 15, 17
   f. 2,5, 2, 1,5
2. Tentukan panjang diagonal sisi *PR* dan panjang diagonal ruang *PV* berdasarkan gambar samping!

3. Riko mempunyai sebuah rumah pohon. Rumah pohon tersebut berada pada ketinggian 3 meter di atas tanah. Untuk menjangkau rumah pohon tersebut, Riko menggunakan tangga yang disandarkan ke batang pohon. Jarak tangga dengan pohon 5 meter.
   a. Buat sketsa gambar berdasarkan keterangan di atas!
   b. Tentukan kemiringan tangga yang akan dinaiki Riko!

4. Jika $PQ = QR = 18$ cm dan $TQ = 24$ cm, tentukan:

   a. TO (garis tinggi limas)
   b. TU (garis tinggi segitiga sisi limas)

5. Sebuah mobil bergerak dari kota *A* ke arah utara sejauh 40 km menuju kota *B*. Dari kota *B* mobil tersebut melanjutkan perjalanan ke arah barat sejauh 30 km menuju kota *C*. Setelah beristirahat sebentar, mobil tersebut melanjutkan perjalanan lagi ke arah selatan sejauh 60 km menuju kota *D*.
   a. Sketsa perjalanan mobil tersebut dari kota *A* sampai kota *D*!
   b. Tentukan jarak dari kota *B* ke kota *D*!
   c. Tentukan jarak kota *A* dengan kota *D*!

KUNCI JAWABAN BAB 5

A. Pilihan Ganda

1. d
3. c
5. b
7. a
9. b
11. d
13. d
15. b
17. c
19. b

B. **Uraian**

1. a, c, e, f
3. b. $\sqrt{34} = 5,8$ m
5. b. $\overline{67,1}$ km

ULANGAN SEMESTER 1

A. Pilihlah satu jawaban yang paling tepat, a, b, c, atau d! Tuliskan pada lembar jawabanmu!

1. Hasil dari $(2a + 3)^2$ adalah ....
   a. $2a^2 + 9$
   b. $4a^2 + 12a + 9$
   c. $4a^2 + 9$
   d. $4a^2 + 12a + 6$
2. Penjabaran dari $(2x - y)(3x + 4y)$ adalah ....
   a. $6x^2 + 5xy + 4y^2$
   b. $6x^2 - 5xy + 4y^2$
   c. $6x^2 + 5xy - 4y^2$
   d. $6x^2 - 5xy - 4y^2$
3. Bentuk sederhana dari pecahan aljabar $\frac{30x^2y}{12xy}$ adalah ....
   a. $\frac{5x^2y}{2xy}$
   b. $\frac{5xy}{2}$
   c. $\frac{5}{2}x$
   d. $\frac{1}{5}x$
4. Penjabaran dari bentuk $\left(2a - \frac{1}{2a}\right)^2$ adalah ....
   a. $4a^2 - \frac{1}{4a^2}$
   b. $4a^2 + \frac{1}{4a^2}$
   c. $4a^2 + 2 + \frac{1}{4a^2}$
   d. $4a^2 - 2 + \frac{1}{4a^2}$
5. Jika $A = \{p, u, n, k\}$ dan $B = \{1, 2\}$ maka himpunan $A \times B$ adalah ....
   a. $\{(p, 1), (u, 1), (n, 1), (k, 1)\}$
   b. $\{(p, 1), (u, 1), (n, 1), (k, 1), (p, 2), (u, 2), (n, 2), (k, 2)\}$
   c. $\{(p, 2), (u, 2), (n, 2), (k, 2)\}$
   d. $\{(p, 1), (u, 1), (n, 1), (k, 1), (p, 2), (u, 2), (n, 2)\}$
6. Sebuah relasi dari dua himpunan dapat disajikan dengan beberapa cara, *kecuali*....
   a. diagram panah
   b. diagram kartesius
   c. diagram garis
   d. himpunan pasangan terurut
7. Misalkan himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Banyaknya korespondensi satu-satu yang mungkin dari himpunan A ke B adalah ....
   a. 6
   b. 12
   c. 24
   d. 36
8. Diketahui $f(x) = a\sqrt{x} + 7$ dan $f(4) = -3$. Nilai dari $f(9)$ adalah ....
   a. 8
   b. 5
   c. 0
   d. –8

9. Garis g sejajar dengan garis h. Jika persamaan garis h adalah $y = \frac{3}{4}x - 5$ maka gradien garis g adalah ....

a. $-\frac{4}{3}$
c. $\frac{3}{4}$
b. $-\frac{3}{4}$
d. $\frac{4}{3}$

10. Persamaan garis berikut yang memiliki gradien $-\frac{1}{3}$ adalah ....

a. $3y + x = 2$
c. $y + 3x = 2$
b. $3y - x = 2$
d. $y - 3x = 2$

11. Garis p tegak lurus garis q. Jika persamaan garis p adalah $y = -\frac{1}{2}x + 1$ dan garis q melalui titik $(-1,-4)$ maka persamaan garis q adalah ....

a. $y = 2x + 2$
c. $y = 2x - 2$
b. $y = -\frac{1}{2}x + 2$
d. $y = \frac{1}{2}x + 2$

12. Titik potong garis $y = -x + 2$ dan $y = x - 1$ adalah ....

a. $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
c. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
c. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
d. $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

13. Himpunan penyelesaian dari persamaan linear dua variabel $2x + y = 5$, jika x dan y anggota himpunan bilangan cacah adalah ....

a. {(0, 5), (1, 3), (2, 1)}
c. {(0, 5), (1, 3), (2, 2)}
b. {(5, 0), (3, 1), (1, 2)}
d. {(0, 6), (1, 3), (2, 1)}

14. Salah satu himpunan penyelesaian dari SPLDV $\begin{cases} 2x + ay = 6; x,y \in R \\ 2x + 3y = 2; x,y \in R \end{cases}$ adalah $y = 4$. Nilai koefisien a adalah ....

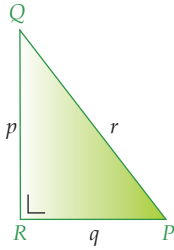
a. 5
c. 3
b. 4
d. 2

15. Jika $3x + 4y = -10$ dan $4x - 5y = -34$ maka nilai dari $8x + 3y$ adalah ....

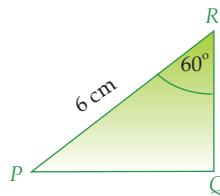
a. –54
c. 42
b. –42
d. 54

16. Harga 3 kg apel dan 2 kg jeruk adalah Rp 28.000,00. Jika harga 2 kg apel dan 5 kg jeruk adalah Rp 37.000,00, harga per kilogram apel dan jeruk masing-masing adalah ....

a. Rp 6.000,00 dan Rp 5.000,00
b. Rp 7.000,00 dan Rp 4.500,00
c. Rp 7.500,00 dan Rp 4.000,00
d. Rp 8.000,00 dan Rp 4.000,00

17. Pada segitiga *PQR* berikut berlaku hubungan .....

a. $p^2 = q^2 + r^2$
b. $q^2 = p^2 + r^2$
c. $r^2 = p^2 + q^2$
d. $p^2 = q^2 - r^2$

18. Segitiga yang panjang sisi-sisinya 10 cm, 12 cm, 15 cm termasuk segitiga ....
   a. sama kaki
   b. tumpul
   c. siku-siku
   d. lancip

19. Panjang *QR* pada segitiga tersebut adalah ....
   a. 2 cm
   b. 3 cm
   c. 4 cm
   d. 5 cm

20. Sebuah tiang listrik dapat berdiri tegak jika ditahan dengan tali kawat baja. Jika jarak dari patok pengikat terhadap tiang listrik adalah 5 m dan tinggi tiang listrik adalah 6 meter, panjang tali kawat yang dibutuhkan adalah ....
   a. 3 m
   b. 7,8 m
   c. 8,7 m
   d. 10 m

B. Selesaikan soal-soal berikut ini!

1. Azizah mempunyai sapu tangan pink berbentuk persegi, dan bentuk sapu tangan Fitri persegi panjang. Jika sapu tangan Azizah berukuran x cm, dan ukuran sapu tangan Fitri $(x + 4)(x - 3)$. Tentukan nilai x dan luas sapu tangan mereka masing-masing jika luas sapu tangan Fitri = luas sapu tangan Azizah!

2. Suatu fungsi f dari himpunan P ke himpunan Q dengan aturan $2x - 2$, $x \in P$. Jika diketahui $P = \{2, 3, 5, 7\}$ dan $\{1, 2, 3, ..., 12\}$, tentukanlah:
   a. Himpunan pasangan berurutan dalam f!
   b. Daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari f!

3. Garis p tegak lurus garis q. Jika persamaan garis p adalah $y = -\frac{1}{4}x + 5$ dan garis q melalui titik (1,-2), tentukanlah persamaan garis q!

4. Dalam pemutaran film di sebuah bioskop hadir 250 penonton. Harga karcis di kursi bagian depan adalah Rp 25.000,00 sedangkan harga karcis di kursi bagian belakang adalah Rp 15.000,00. Jika uang hasil pemutaran film tersebut adalah Rp 4.750.000,00, tentukanlah:
   a. Model matematika dari permasalahan tersebut!
   b. Banyaknya penonton di kursi bagian depan dan banyaknya penonton di kursi bagian belakang!

5. Seorang anak berenang di sebuah kolam yang permukaannya berbentuk persegi panjang dengan panjang 16 m. Jika ia berenang secara diagonal dan menempuh jarak 20 m, tentukanlah lebar kolam renang tersebut!
6. Diketahui domain suatu fungsi $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
   $f(x) = 0$ untuk $x = 0$, $f(x) = x^2 + 1$ untuk x ganjil, dan $f(x) = x^2 - 1$ untuk x genap.
   Tentukan:
   a. Himpunan pasangan berurutan!
   b. Diagram panah!
   c. Diagram kartesius!

KUNCI JAWABAN ULANGAN SEMESTER 1

A. Pilihan Ganda

1. b
3. c
5. b
7. c
9. c
11. c
13. a
15. b
17. c
19. b

B. Uraian

1. $x = 12$ cm
   Azizah = 144 cm^2
   Fitri = 144 cm^2
3. $y = 4x - 6$
5. 12 m

Bab

Lingkaran

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini siswa diharapkan mampu:

- Membedakan lingkaran dan bidang lingkaran serta dapat menyebutkan bagian-bagian lingkaran: pusat lingkaran, jari-jari, diameter, busur, tali busur, juring, dan tembereng;
- Menentukan nilai π (phi);
- Menghitung keliling dan luas bidang lingkaran;
- Menghitung panjang busur, luas juring, dan luas tembereng;
- Melukis lingkaran dalam, lingkaran luar suatu segitiga, serta menggambar lingkaran melalui tiga titik yang diketahui;
- Mengenal hubungan sudut pusat dan sudut keliling jika menghadap busur yang sama;
- Menentukan besar sudut-sudut keliling jika menghadap diameter dan busur yang sama.

Benda-benda di sekitarmu banyak yang permukaannya berbentuk lingkaran. Contohnya permukaan bedug, tambur, dan drum. Coba perhatikanlah penampang bedug! Penampang sebuah bedug biasanya dilapisi kulit sapi atau kerbau. Jika sebuah bedug berdiameter 90 cm, dapatkah kamu menghitung luas kulit penutup bedug tersebut?

Peta konsep

Lingkaran
A. Lingkaran dan unsur-unsurnya
B. Keliling dan luas lingkaran
1. Menghitung keliling lingkaran
2. Menghitung luas lingkaran
3. Perubahan luas lingkaran jika jari-jarinya berubah
C. Menghitung panjang busur, luas juring, dan luas tembereng
D. Lingkaran dalam dan lingkaran luas segitiga
1. Melukis lingkaran dalam segitiga
2. Melukis lingkaran luar segitiga
3. Panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga dan lingkaran luar segitiga
E. Sudut pusat dan sudut keliling
1. Hubungan sudut pusat dan sudut keliling
2. Sifat sudut-sudut keliling

A Lingkaran dan nsur nsurnya

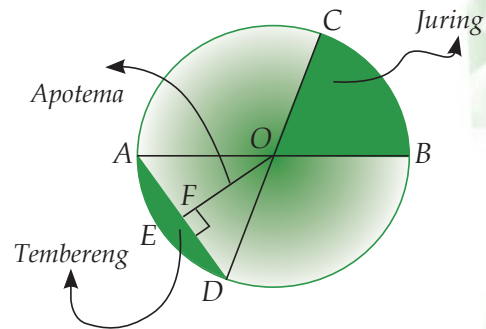
Perhatikan gambar di samping!

Benda-benda pada gambar tersebut bagian tepinya berbentuk lingkaran. Dapatkah kalian menyebutkan benda lain yang bagian tepinya berbentuk lingkaran?

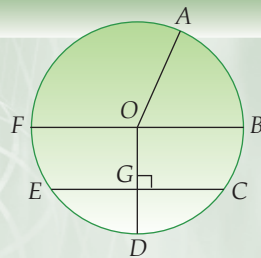
Lingkaran adalah kumpulan titik-titik pada garis lengkung yang mempunyai jarak yang sama terhadap pusat lingkaran. Garis lengkung tersebut kedua ujungnya saling bertemu membentuk *daerah lingkaran* (luas lingkaran).

Perhatikan gambar berikut!

1. Titik O disebut *titik pusat lingkaran*.
2. Garis OA, OB, OC, dan OD disebut *jari-jari lingkaran* (r).
3. Garis AB dan CD disebut diameter (d) atau garis tengah. Garis tengah, yaitu garis yang menghubungkan dua titik yang berada tepat pada lingkaran dan melalui titik pusat lingkaran (titik O). Panjang diameter lingkaran sama dengan dua kali panjang jari-jari lingkaran ($d = 2r$).

4. Garis lurus AD disebut *tali busur*.
5. Garis lengkung AD dan CB disebut *busur*, biasa ditulis $\overset{\frown}{AD}$ dan $\overset{\frown}{CB}$. Busur dibagi menjadi dua bagian, yaitu busur kecil (garis lengkung AED) dan busur besar (garis lengkung $ACBD$). (Jika disebut busur AD dan tidak ada keterangan, maka busur yang dimaksud adalah busur kecil/busur AED).
6. Daerah yang batasi oleh *busur* dan dua buah jari-jari disebut juring, misalnya daerah yang dibatasi oleh busur CB, OC, dan OB membentuk juring COB.
7. Daerah yang dibatasi oleh busur dan tali busur disebut *tembereng*, misalnya daerah yang dibatasi oleh busur AD dan tali busur AD membentuk tembereng.
8. Garis OF disebut *apotema*, yaitu jarak terpendek tali busur terhadap titik pusat lingkaran.

Tugas

Perhatikan gambar berikut!

Sebutkanlah bagian-bagian dari lingkaran di samping!

B eliling dan Luas Lingkaran

Keliling lingkaran adalah jarak dari suatu titik pada lingkaran dalam satu putaran hingga kembali ke titik semula.

Sebelum membahas bagaimana menghitung keliling dan luas sebuah lingkaran, kamu harus mengetahui pendekatan nilai π (*phi*) terlebih dahulu. Untuk mengetahui pendekatan nilai π, lakukanlah kegiatan di bawah ini.

Tugas

Carilah lima buah benda yang tepinya berbentuk lingkaran di rumah kalian! Ukur diameter dan keliling lingkaran dengan menggunakan benang. Kemudian ukurlah benang tersebut dengan penggaris. Setelah itu catat hasil pengukuranmu pada tabel seperti berikut dan lengkapilah!

No	Nama Benda	Diameter (cm)	Keliling (cm)	$\frac{\text{Keliling}}{\text{Diameter}}$
1				
2				
3				
4				
5				

Untuk mengisi kolom kelima, lakukan perhitungan menggunakan kalkulator sampai dua angka di belakang koma!

Nilai perbandingan $\frac{\text{Keliling}}{\text{Diameter}}$ yang kamu dapat dari kegiatan di atas adalah nilai pendekatan π. Nilai *phi* ini berada pada kisaran 3,141 < π < 3,142. Karena π merupakan bilangan irrasional, maka π tidak dapat dinyatakan secara pasti dengan sebuah bilangan pecahan ataupun bilangan desimal. Oleh karena itu, nilai π hanya bisa dinyatakan dengan nilai pendekatan saja.

Dengan membulatkan sampai dua angka desimal, maka bilangan desimal yang mewakili nilai π adalah 3,14, sedangkan bilangan pecahan yang dapat mewakili nilai π adalah $\frac{22}{7}$.

Tokoh

Eratosthenes (240 SM) adalah ilmuwan yang mencari keliling bumi dengan mengukur sudut-sudut yang terbentuk oleh matahari saat tengah hari di Alexandria, Mesir, dengan sebuah sumur di Syene (sekarang Aswan), tempat yang jaraknya diketahui dan berada pada garis bujur yang sama.

(*Sumber: Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*)

1 Menghitung Keliling Lingkaran

Dari kegiatan di atas diketahui bahwa $\pi = \frac{\text{Keliling}}{\text{Diameter}}$, maka

Keliling = π × diameter

= π × 2*r* (*Ingat*, *d* = 2 × *r*,

= 2π*r* dimana *r* merupakan jari-jari lingkaran)

Sehingga dapat disimpulkan jika *d* = diameter, *r* = jari-jari, dan π = $\frac{22}{7}$ atau 3,14, maka untuk setiap lingkaran berlaku rumus:

$$\text{Keliling} = 2\pi r = \pi \times d$$

Dapatkah kalian menentukan kapan menggunakan π dengan $\frac{22}{7}$ atau 3,14?

Contoh

1. Keliling sebuah lingkaran adalah 396 cm. Hitunglah jari-jari lingkaran tersebut jika $\pi = \frac{22}{7}$!

Penyelesaian:

Keliling = 396 cm, $\pi = \frac{22}{7}$

Keliling = 2π*r*

$396 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$

$396 = \frac{44}{7} \times r$

$7 \times 396 = 44 \times r$

$2.772 = 44 \times r$

$r = \frac{2772}{44} = 63$ cm

Jadi, jari-jari lingkaran tersebut adalah 63 cm.

2. Hitunglah keliling daerah yang di arsir pada gambar di samping!

Penyelesaian:

Gambar tersebut adalah persegi yang ditambah setengah lingkaran dan dikurangi juga oleh setengah lingkaran, dengan diameter lingkaran sama dengan sisi persegi. Maka,

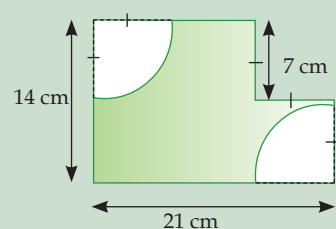
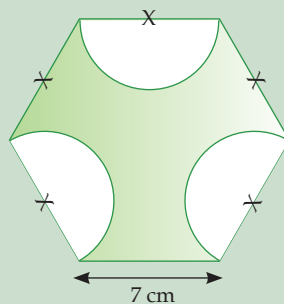
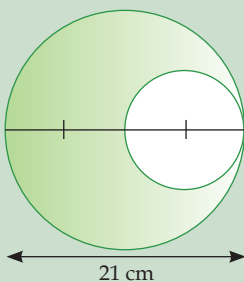
Keliling = $14 + 14 + \frac{1}{2}$ keliling lingkr. + $\frac{1}{2}$ keliling lingkr.

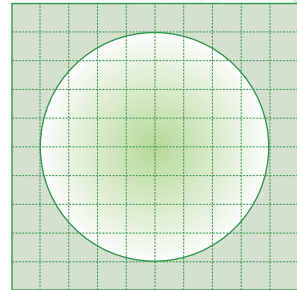
$= 14 + 14 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14$

$= 28 + 22 + 22 = 72$ cm

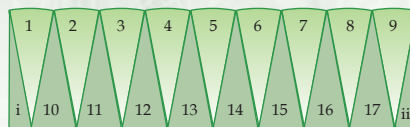
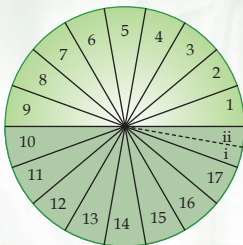
Jadi keliling daerah yang diarsir adalah 72 cm.

Latihan Soal

1. Hitunglah keliling lingkaran dengan panjang jari-jari berikut ini!
   a. 42 cm
   b. 15 cm
   c. 6,3 cm
   d. 2,6 cm
2. Keliling sebuah lingkaran adalah 22 cm. Hitunglah jari-jari lingkaran tersebut jika $\pi = \frac{22}{7}$!
3. Keliling sebuah lingkaran adalah 20,14 cm. Tentukan besar diameter lingkaran tersebut jika π = 3,14!
4. Seorang atlet atletik berlari di lintasan sebanyak 4 kali dan menempuh jarak 10,048 km. Jika π = 3,14, berapa meterkah jari-jari lintasan tersebut?
5. Hitunglah keliling daerah yang di arsir pada gambar berikut in!

2 Menghitung Luas Lingkaran

Luas lingkaran adalah daerah di dalam lingkaran yang dibatasi oleh keliling lingkaran. Luas lingkaran dapat diperkirakan dengan bantuan petak satuan, seperti pada gambar. Untuk memperkirakan luas lingkaran tersebut, hitunglah banyaknya petak yang mewakili daerah lingkaran, dengan ketentuan, jika setengah petak atau lebih dihitung satu petak, dan jika kurang dari setengah petak tidak dihitung. Maka untuk lingkaran pada gambar di samping, luasnya adalah 52 cm^2.

Untuk menentukan rumus luas lingkaran lakukanlah kegiatan berikut ini.

Tugas

1. Buatlah sebuah lingkaran pada karton putih dengan panjang diameter 10 cm.
2. Bagilah lingkaran tersebut menjadi dua bagian, berdasarkan garis diameter lingkaran. Berilah warna pada salah satu bagian.
3. Bagilah kembali tiap bagian menjadi juring-juring dengan sudut 20°, sehingga lingkaran tersebut terbagi menjadi 18 bagian yang sama besar.
4. Bagilah kembali salah satu bagian juring menjadi dua buah juring dengan ukuran sudut 10°.
5. Kemudian potonglah lingkaran tersebut berdasarkan juring-juring yang telah kamu buat, dan susunlah seperti yang tampak pada gambar di bawah ini.

6. Setelah kamu susun, coba amati susunan lingkaran tersebut, apakah bentuknya menyerupai persegi panjang? Jika ya, apakah ukuran panjang dan lebarnya berhubungan dengan keliling lingkaran dan jari-jari lingkaran? Diskusikan dengan teman sebangkumu.

Dari kegiatan di atas, tahukah kamu, apa yang terjadi jika juring-juring yang dibuat sudutnya diperkecil? Jawabannya adalah bentuknya akan menyerupai persegi panjang. Maka, dapat dinyatakan bahwa:

Luas lingkaran = luas persegi panjang yang tersusun
= panjang × lebar
$= \frac{1}{2} \times$ keliling lingkaran × jari-jari lingkaran
$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$

Karena $r = \frac{1}{2} d$, maka rumus di atas dapat dinyatakan juga sebagai berikut.

Luas lingkaran $= \pi (\frac{1}{2} d)^2 = \frac{1}{4} \pi d^2$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa untuk setiap lingkaran dengan jari-jari r dan $\pi = \frac{22}{7}$ atau 3,14, berlaku rumus:

$$\text{Luas lingkaran} = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2$$

Contoh

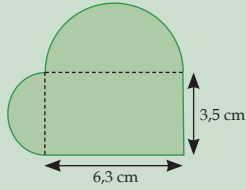
1. Luas sebuah lingkaran adalah 1.256 cm². Hitunglah diameter lingkaran jika π = 3,14!

   Penyelesaian:

   Luas = 1.256 cm², π = 3,14

   $$\begin{aligned} \text{Luas} &= \frac{1}{4} \pi d^2 \\ 1.256 &= \frac{1}{4} \times 3,14 \times d^2 \\ 1.256 \times 4 &= 3,14 \times d^2 \\ 5.024 &= 3,14 \times d^2 \\ d^2 &= 5.024 : 3,14 = 1600 \\ d &= \sqrt{1600} = 40 \text{ cm} \end{aligned}$$

   Jadi, diameter lingkaran yang dimaksud adalah 40 cm.

2.

Berdasarkan gambar di samping, hitunglah luas daerah yang diarsir!

Penyelesaian:

Gambar di atas adalah gambar bangun persegi panjang ditambah dengan setengah lingkaran kecil dan setengah lingkaran besar, maka luas daerah yang diarsir adalah:

$L = L$ persegi panjang + $L\ \frac{1}{2}$ lingkr. kecil + $L\ \frac{1}{2}$ lingkr. besar

$L = (6{,}3 \times 3{,}5) + (\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 1{,}75^2) + (\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 3{,}15^2)$

$L = 22{,}05 + 4{,}81 + 15{,}59 = 42{,}45\ \text{cm}^2$

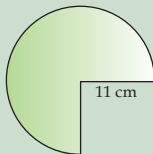
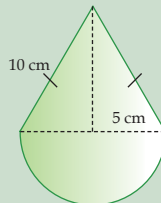
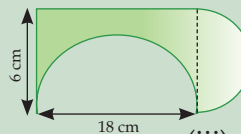
Jadi luas daerah yang diarsir adalah 42,45 cm^2.

Latihan Soal

1. Hitunglah luas lingkaran dengan panjang jari-jari berikut ini!
   a. 49 cm
   b. 19 cm
   c. 1,4 cm
   d. 9 cm
2. Luas sebuah lingkaran adalah 1.386 cm^2. Hitunglah jari-jari lingkaran tersebut jika $\pi = \frac{22}{7}$!
3. Luas sebuah lingkaran adalah 2,83 cm^2. Hitunglah diameter lingkaran tersebut jika $\pi = 3{,}14$!
4. Hitunglah luas daerah yang diarsir pada gambar berikut ini!

(i)

(ii)

(iii)

5. Sebuah taman berbentuk persegi panjang dengan ukuran panjang 5 m dan lebar 3 m. Di dalam taman tersebut terdapat sebuah kolam berbentuk seperempat lingkaran dengan panjang diameter 3 m. Taman tersebut akan ditanami rumput kecuali kolamnya. Jika biaya penanaman rumput tersebut adalah Rp 35.000 untuk tiap 1 m^2, hitunglah biaya penanaman rumput tersebut!

3 Perubahan Luas Lingkaran Jika Jari-Jarinya Berubah

Luas sebuah lingkaran bergantung pada panjang jari-jari lingkaran tersebut. Jika kita ubah panjang jari-jari sebuah lingkaran, maka luasnya pun akan berubah. Untuk mengetahui besar perubahan luas lingkaran, kita dapat mencarinya dengan cara menghitung selisih antara luas sebelum dan sesudah perubahan jari-jari.

Apabila perubahan jari-jari lingkaran berupa kelipatan dari jari-jari lingkaran semula, maka akan terdapat hubungan antara luas lingkaran sebelum perubahan dengan luas lingkaran setelah perubahan. Untuk mengetahuinya, lakukanlah kegiatan berikut ini.

Tugas

Salin tabel berikut inikemudian lengkapilah!

Jari-jari lingkaran		Luas lingkaran		Perubahan jari-jari $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$	Perubahan luas $\left(\frac{L_2}{L_1}\right)$
r_1 (cm)	r_2 (cm)	L_1 (cm^2)	L_2 (cm^2)		
14	28	616	2464	2	$4 = 2^2$
14	42	…..	…..	…..	…….
14	7	…..	…..	$\frac{1}{2}$	…..
14	21	…..	…..	…..	…….

Setelah kamu melengkapi tabel tersebut, apa yang dapat kamu simpulkan dari kegiatan ini? Diskusikanlah dengan teman sebangkumu!

Bandingkan hasilnya dengan kesimpulan berikut ini.

Jika panjang jari-jari sebuah lingkaran kedua adalah n kali jari-jari lingkaran pertama, maka luas lingkaran kedua adalah n^2 kali luas lingkaran pertama

Contoh

Panjang jari-jari sebuah lingkaran 8 cm. Jika panjang jari-jari lingkaran itu diperbesar 2 kali, hitunglah:

a. Luas lingkaran setelah diperbesar

b. Besar perubahan luas dari lingkaran tersebut.

Penyelesaian:

n = 2 kali, r = 8 cm

a. Luas lingkaran sebelum perubahan

$L = \pi \times r^2$

$= 3,14 \times 8^2 = 200,96 \text{ cm}^2$

Luas lingkaran setelah perubahan

$L = n^2 \times$ luas lingkaran sebelum perubahan

$= 2^2 \times 200,96$

$= 4 \times 200,96$

$= 803,84 \text{ cm}^2$

b. Besar perubahan luas

L = L lingkaran setelah perubahan – L lingkaran sebelum perubahan

$= 803,84 - 200,96 = 602,88 \text{ cm}^2$

Latihan Soal

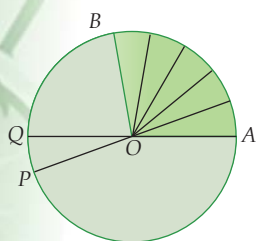
1. Panjang jari-jari lingkaran pertama 21 cm. Hitunglah:
   a. luas lingkaran kedua yang panjang jari-jarinya 3 kali panjang jari-jari lingkaran pertama.
   b. luas lingkaran ketiga yang panjang jari-jarinya 5 kali panjang jari-jari lingkaran pertama.
   c. luas lingkaran kedua yang panjang jari-jarinya $\frac{1}{4}$ kali panjang jari-jari lingkaran pertama.
2. Luas lingkaran pertama 180 cm², dan luas lingkaran kedua 20 cm². Berapa kalikah panjang jari-jari lingkaran pertama terhadap panjnag jari-jari lingkaran kedua?
3. Panjang jari-jari lingkaran pertama 15 cm. Panjang jari-jari lingkaran kedua $\frac{2}{3}$ kali panjang jari-jari lingkaran pertama. Hitunglah besar perubahan luas kedua lingkaran tersebut!

Math Info

Pelangi merupakan sekumpulan lingkaran dimana satu lingkaran untuk satu warna. Saat kita melihat pelangi dari permukaan bumi sebenarnya kita hanya melihat busur masing-masing lingkaran, jika kita melihatnya di udara, maka kita bisa melihat utuh lingkaran pelangi tersebut

(*Sumber: Encarta*)

Menghitung Panjang Busur Luas uring dan Luas Tembereng

Pada subbab sebelumnya kalian telah belajar tentang panjang busur, luas juring, dan tembereng lingkaran. Untuk menghitung besar panjang busur, luas juring, dan luas tembereng, kita harus membahas hubungan antara sudut pusat, panjang busur, dan luas juring. Apakah sudut pusat itu? Sudut pusat adalah sudut yang titik sudutnya tepat berada di pusat lingkaran.

Perhatikanlah gambar di samping! *OA*, *OB*, *OP*, dan *OQ* adalah jari-jari lingkaran. $\angle AOB$ dan $\angle POQ$ adalah sudut pusat lingkaran. Misalkan $\angle AOB = 100^0$ dan $\angle POQ = 20^0$. Jika luas juring *AOB* diukur menggunakan luas juring *POQ*, maka luas juring *AOB* sama dengan lima kali luas juring *POQ*. Dan jika panjang busur *AOB* diukur dengan menggunakan panjang busur *POQ*, maka panjang busur *AOB* sama dengan lima kali panjang busur *POQ*. Berdasarkan hal tersebut, maka dapat dibuat perbandingan sebagai berikut.

a. Besar $\angle AOB$: besar $\angle POQ = 100^0 : 20^0 = 5 : 1$

b. Luas juring *AOB* : luas juring *POQ* = 5 : 1

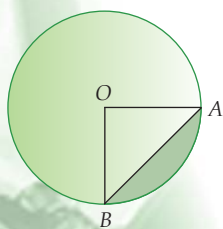
c. Panjang busur *AOB* : panjang busur *POQ* = 5 : 1

Sehingga dapat ditarik kesimpulan, bahwa perbandingan besar sudut pusat sebanding dengan luas juring dan sebanding dengan panjang busur yang dihadapan sudut pusat. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{\text{Besar } \angle AOB}{\text{Besar } \angle POQ} = \frac{\text{Luas juring } AOB}{\text{Luas juring } POQ} = \frac{\text{Panjang busur } AB}{\text{Panjang busur } PQ}$$

Karena dalam satu lingkaran sama dengan satu putaran penuh (360^o), keliling lingkaran sama dengan $2\pi r$, dan luas lingkaran sama dengan πr^2, maka hubungan perbandingan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk berikut.

$$\frac{\text{Besar } \angle AOB}{360^o} = \frac{\text{Luas juring } AOB}{\text{Luas lingkaran}} = \frac{\text{Panjang busur AB}}{\text{Keliling lingkaran}}$$

$$\frac{\text{Besar } \angle AOB}{360^o} = \frac{\text{Luas juring } AOB}{\pi r^2} = \frac{\text{Panjang busur AB}}{2\pi r}$$

Untuk selanjutnya, perhatikan gambar di samping! Bagaimanakah cara mencari luas tembereng lingkaran pada gambar tersebut?

Perhatikan juring *AOB* pada gambar!

Luas juring AOB = Luas ΔAOB + Luas tembereng AB

Luas tembereng AB = Luas juring AOB – Luas ΔAOB

Contoh

Diketahui OC = 14 cm, panjang busur DC = 22 cm, dan $\angle AOB = 40^\circ$. Hitunglah:

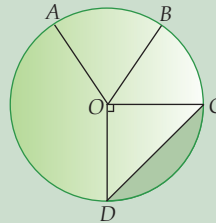
a. Panjang busur AB

b. Luas juring COD

c. Luas tembereng DC

Penyelesaian:

OC = 14 cm, panjang busur DC = 22 cm,

$\angle AOB = 40^\circ$

a. $$\frac{\text{Besar } \angle AOB}{\text{Besar } \angle COD} = \frac{\text{Panjang } \widehat{AB}}{\text{Panjang } \widehat{CD}}$$

$$\frac{40}{90} = \frac{\text{Panjang } \widehat{AB}}{22}$$

$$\text{Panjang } \widehat{AB} = \frac{22 \times 40}{90} = \frac{880}{90} = 9{,}78 \text{ cm}$$

b. $$\text{Luas lingkaran} = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 14^2 = 616 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\text{Besar } \angle COD}{360^\circ} = \frac{\text{Luas juring } COD}{\text{Luas lingkaran}}$$

$$\frac{90}{360} = \frac{\text{Luas juring } COD}{616}$$

$$\text{Luas juring } COD = \frac{90 \times 616}{360} = 154 \text{ cm}^2$$

d. $$\text{Luas } \Delta COD = \frac{1}{2} \times a \times t$$

$$= \frac{1}{2} \times 14 \times 14$$

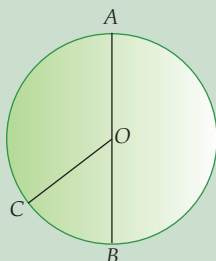
$$= 98 \text{ cm}^2$$

Luas tembereng CD = luas juring COD – luas ΔCOD

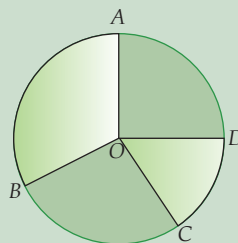
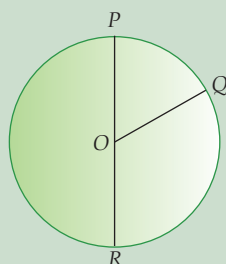
= 154 – 98

= 56 cm^2

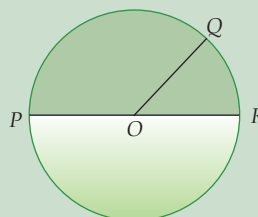
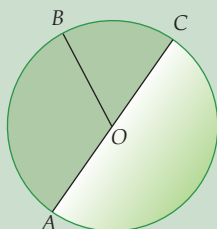
Latihan Soal

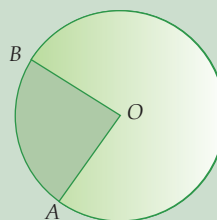
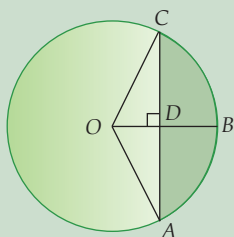
1.

Pada gambar disamping, jika AB adalah diameter lingkaran, $\angle COB = 62^0$, panjang busur CB = 17cm. Hitunglah panjang $\overset{\frown}{AC}$!

2. Pada gambar di samping, $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle COD = 30^\circ$, luas juring $AB = 150$ cm^2. Hitunglah luas juring CD!

3.

Pada gambar di samping, $\angle POQ : \angle QOR = 3 : 6$. Jika panjang busur PQ = 23 cm, hitunglah panjang busur QR dan keliling lingkaran tersebut!

4. Pada gambar di samping, OP adalah jari-jari lingkaran dengan panjang 10 cm. Jika $\angle POQ : \angle QOR = 8 : 3$, hitunglah luas juring POQ!

5.

Pada gambar di samping, $\angle BOC = 72^\circ$, dan luas juring BOC = 45 cm^2. Hitunglah luas juring AOB dan luas lingkaran tersebut!

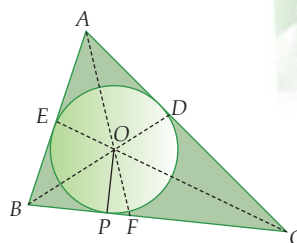
6. Pada gambar di samping, $\angle AOB = 60^\circ$ dan luas juring AOB = 231 cm^2. Hitunglah jari-jari lingkaran tersebut!

7.

Pada gambar di samping, panjang jari-jari lingkaran OA = 25 cm, $\angle AOC = 120^o$, dan DB = 16 cm. Hitunglah:

a. Panjang busur AC
b. Luas juring AOC
c. Luas segitiga AOC
d. Luas tembereng AC

D Lingkaran Dalam dan Lingkaran Luar Segitiga

Pada subbab ini, kita akan membahas langkah-langkah melukis lingkaran dalam segitiga, lingkaran luar segitiga, dan menghitung panjang jari-jari dari kedua lingkaran tersebut.

1 Melukis Lingkaran Dalam Segitiga

Perhatikan gambar! Lingkaran dengan jari-jari OP merupakan sebuah lingkaran yang terdapat di dalam segitiga ABC. Jadi yang dimaksud dengan lingkaran dalam segitiga adalah lingkaran yang menyinggung ketiga sisi segitiga di bagian dalam dari segitiga tersebut. Untuk dapat melukis lingkaran dalam segitiga, kita perlu memperhatikan beberapa hal berikut ini.

a. AF, BD, dan CE adalah garis bagi ΔABC, yaitu garis yang membagi sebuah sudut menjadi dua bagian yang sama besar.

b. Titik O merupakan titik pusat lingkaran dan juga titik potong dari ketiga garis bagi ΔABC.

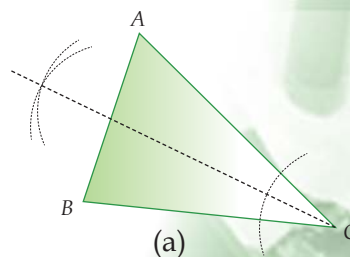
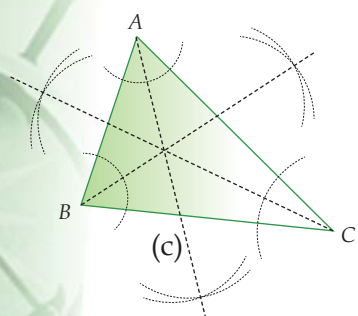
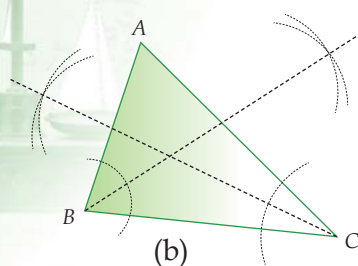
c. OP tegak lurus terhadap garis BC yang merupakan jari-jari lingkaran.

Berdasarkan uraian di atas, maka untuk melukis sebuah lingkaran dalam segitiga, langkah-langkah yang harus dilakukan adalah:

1. Lukis sebarang segitiga. (Beri nama, misal ΔABC).

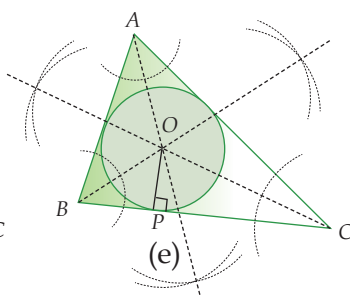
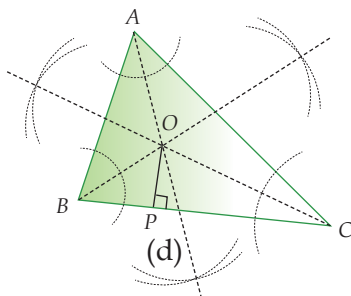
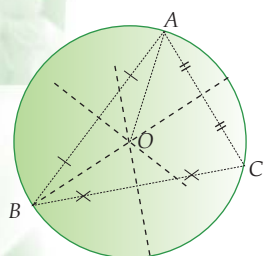
2. Lukis garis bagi untuk $\angle ACB$ (gambar (a)), $\angle ABC$ (gambar (b)), dan $\angle BAC$ (gambar (c)). Ketiga garis bagi ini akan berpotongan di satu titik, yaitu titik O.

(a)

(b)

3. Lukis garis *OP* yang tegak lurus dengan salah satu sisi segitiga, misal sisi *BC* (gambar (d)).
4. Lukis sebuah lingkaran dengan jari-jari *OP* yang tepat menyinggung ketiga sisi ΔABC (gambar (e)). Lingkaran yang terbentuk inilah yang dinamakan dengan lingkaran dalam segitiga.

(c)

(d)

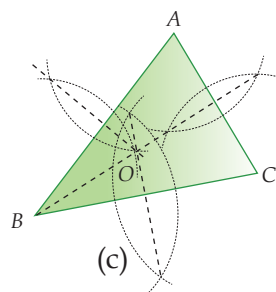
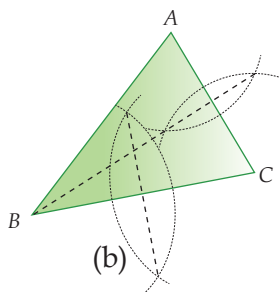
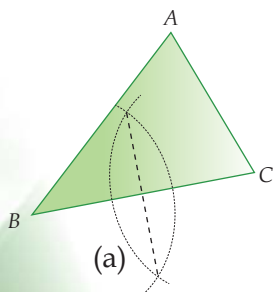
(e)

2 Melukis Lingkaran Luar Segitiga

Perhatikan gambar di samping! Lingkaran dengan jari-jari *OA* adalah sebuah lingkaran yang terdapat di bagian luar segitiga *ABC*. Jadi yang dimaksud dengan lingkaran luar segitiga adalah lingkaran yang menyinggung ketiga titik sudut segitiga dengan tepat. Untuk dapat melukis lingkaran luar segitiga tersebut, perlu diperhatikan beberapa hal, yaitu:

a. Garis putus-putus pada gambar adalah garis sumbu ΔABC, yaitu garis yang membagi sebuah garis/sisi menjadi dua bagian yang sama panjang.
b. Titik *O* merupakan titik pusat lingkaran dan juga titik potong dari ketiga garis sumbu ΔABC.
c. *OA* adalah jari-jari lingkaran.

Berdasarkan uraian di atas, untuk melukis sebuah lingkaran luar sebuah segitiga, langkah-langkah yang harus dilakukan adalah sebagai berikut.

(a)

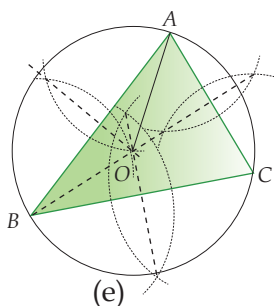
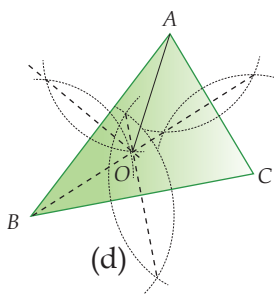
(b)

(c)

1. Lukis sebarang segitiga. (Beri nama, misal ΔABC).
2. Lukis garis sumbu untuk garis BC (gambar (a)), garis AC (gambar (b)), dan AB (gambar (c)). Ketiga garis sumbu ini akan berpotongan di titik O.

(d)

3. Lukis jari-jari lingkaran dengan cara menghubungkan titik O dengan salah satu titik sudut segitiga, misalnya OA (gambar (d)).

4. Lukis sebuah lingkaran dengan jari-jari OA yang tepat menyinggung ketiga titik sudut ΔABC (gambar (e)). Lingkaran yang terbentuk ini dinamakan lingkaran luar segitiga.

(e)

Setelah mempelajari langkah-langkah melukis lingkaran dalam dan lingkaran luar segitiga, selanjutnya kita akan melukis lingkaran melalui tiga titik tak segaris yang diketahui. Langkah-langkah melukis lingkaran melalui tiga titik tak segaris yang diketahui sama dengan *langkah-langkah melukis lingkaran luar segitiga*. Hanya saja, langkah pertama yang harus dilakukan sebelum melukis lingkaran melalui tiga titik tak segaris adalah menghubungkan ketiga titik tersebut, sehingga terbentuk sebuah segitiga.

Tugas

Salinlah tiga titik yang tak segaris di bawah ini. Kemudian lukislah lingkaran yang melalui tiga garis tersebut!

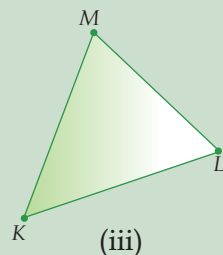
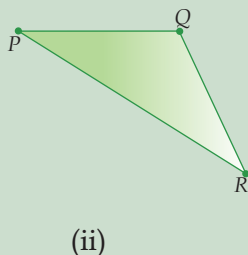
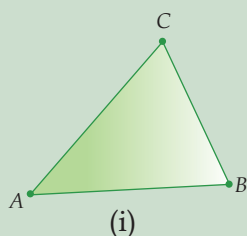
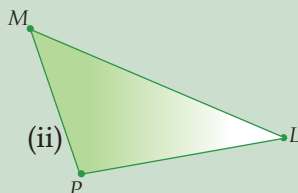
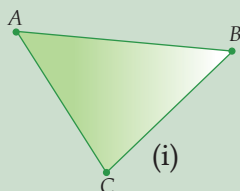
•

•

•

(Ingat, lukislah garis yang menghubungkan ketiga titik yang tak segaris tersebut, lalu ikutilah langkah-langkah untuk melukis lingkaran luar segitiga.)

Latihan Soal

1. Salinlah segitiga-segitiga berikut ini, kemudian lukislah lingkaran dalamnya!

2. Salinlah segitiga-segitiga berikut ini, kemudian lukislah lingkaran luarnya!

3. Salinlah ketiga titik yang tak segaris berikut ini, kemudian lukislah sebuah lingkaran yang melalui ketiga titik tersebut!

   a. • R   P •   • Q

   b. M •   • L   K •

3 Panjang Jari-Jari Lingkaran Dalam Segitiga dan Lingkaran Luar Segitiga

Untuk mengetahui panjang jari-jari lingkaran dalam dan luar segitiga, kita harus mengetahui rumus luas segitiga sebarang. Rumus luas segitiga sebarang adalah:

Jika panjang sisi-sisi segitiga adalah a, b, c, dan $s = \frac{1}{2}$ keliling segitiga tersebut, maka:

$$\text{Luas segitiga} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

a. Panjang Jari-jari Lingkaran Dalam

Perhatikan gambar! OP, OQ, dan OR adalah jari-jari lingkaran dalam segitiga. Jika $OP = OQ = OR = r_d$, $BC = a$, $AC = b$, dan $AB = c$, maka:

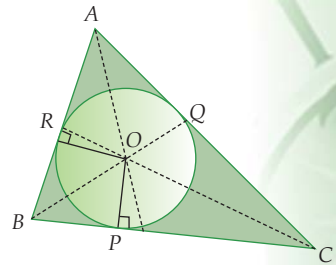
$$\begin{aligned}
\text{Luas } \Delta ABC &= \text{Luas } \Delta OBC + \text{Luas } \Delta OAC + \text{Luas } \Delta OAB \\
&= \left(\tfrac{1}{2} \times BC \times OP\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times AC \times OQ\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times AB \times OR\right) \\
&= \left(\tfrac{1}{2} \times a \times r_d\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times b \times r_d\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times c \times r_d\right) \\
&= \tfrac{1}{2} \times r_d \times (a + b + c) = r_d \times \tfrac{1}{2} \times (a + b + c) \\
&= r_d \times \tfrac{1}{2} \times \text{keliling } \Delta ABC
\end{aligned}$$

Jika $\frac{1}{2} \times$ keliling $\Delta ABC = s$, maka:

$$\begin{aligned}
\text{Luas segitiga} &= r_d \times s \\
r_d &= \frac{\text{Luas segitiga}}{s}
\end{aligned}$$

Sehingga, dapat kita simpulkan untuk sebarang segitiga dengan panjang sisi-sisinya a, b, dan c, serta $s = \frac{1}{2} \times$ keliling segitiga, maka jari-jari lingkaran dalam segitiga tersebut adalah:

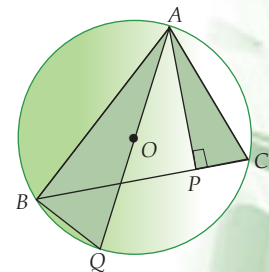
$$r_d = \frac{\text{Luas segitiga}}{s}$$

$$r_d = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

b. Panjang Jari-jari Lingkaran Luar

Selanjutnya, perhatikan gambar di samping. Lingkaran yang terbentuk pada gambar adalah lingkaran luar ΔABC yang berpusat di titik O. OA dan OQ adalah jari-jari lingkaran luar. Misalkan $OA = OQ = r_l$, $BC = a$, $AC = b$, dan $AB = c$.

Perhatikan ΔAQB dan ΔACP!

Besar $\angle ABQ$ (sudut keliling yang menghadap busur AQ dan menghadap diameter lingkaran) $= 90^\circ = \angle APC$ (karena AP adalah garis tinggi ΔACP, maka $AP \perp BC$). Besar $\angle AQB = \angle ACP$ karena sudut keliling menghadap busur yang sama). (Materi bahasan sudut keliling akan dibahas pada subbab berikutnya).

Karena terdapat dua buah sudut yang bersesuaian sama besar, maka ΔAQB dan ΔACP sebangun (bentuknya sama, tetapi ukurannya berbeda). Sehingga dapat ditulis secara matematis

dalam bentuk berikut.

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{AB}{AP}$$

$$AQ = \frac{AB \times AC}{AP} \quad \text{(kalikan pembilang dan penyebut dengan } BC\text{)}$$

$$2r_l = \frac{BC \times AB \times AC}{BC \times AP}$$

$$2r_l = \frac{BC \times AB \times AC}{2 \times \frac{1}{2} \times BC \times AP}$$

$$2r_l = \frac{BC \times AB \times AC}{2 \times \text{Luas } \Delta ABC}$$

$$r_l = \frac{a \times b \times c}{4 \times \text{Luas } \Delta ABC}$$

Sehingga, dapat kita simpulkan untuk sebarang segitiga dengan panjang sisi-sisinya a, b, dan c, serta $s = \frac{1}{2} \times$ keliling segitiga, maka jari-jari lingkaran luar segitiga adalah:

$$r_1 = \frac{a \times b \times c}{4 \times \text{Luas } \Delta ABC}$$

$$r_1 = \frac{a \times b \times c}{4 \times \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Contoh

Panjang sisi-sisi sebuah segitiga adalah 6 cm, 8 cm, dan 10 cm. Hitunglah:

a. Keliling lingkaran dalam segitiga
b. Luas lingkaran luar segitiga

Penyelesaian:

Diketahui a = 6 cm, b = 8 cm, c = 10 cm

$$s = \frac{1}{2} \times \text{keliling segitiga}$$

$$= \frac{1}{2} \times (a + b + c) = \frac{1}{2} \times (6 + 8 + 10) = \frac{1}{2} \times 24 = 12$$

$$\text{Luas segitiga} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}$$

$$= \sqrt{12(6)(4)(2)}$$
$$= \sqrt{576} = 24 \text{ cm}^2$$

a. $r_d = \dfrac{\text{Luas segitiga}}{s} = \dfrac{24}{12} = 2 \text{ cm}$

Keliling lingkaran dalam segitiga

$= 2\pi r_d = 2 \times 3{,}14 \times 2 = 12{,}56 \text{ cm}$

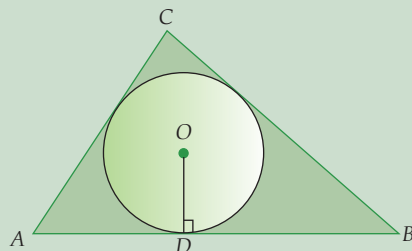
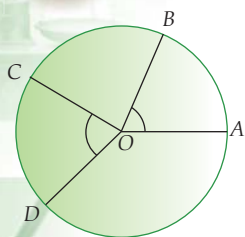
b. $r_l = \dfrac{a \times b \times c}{4 \times \text{Luas segitiga}} = \dfrac{6 \times 8 \times 10}{4 \times 24} = \dfrac{480}{96} = 5 \text{ cm}$

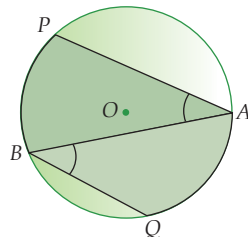
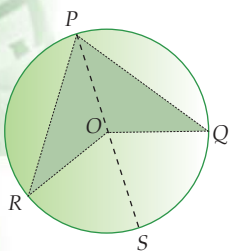
Luas lingkaran luar segitiga

$= \pi r_l^2 = 3{,}14 \times 5^2 = 78{,}5 \text{ cm}^2$

Latihan Soal

1. Diketahui panjang sisi-sisi sebuah segitiga adalah 12 cm, 15, dan 19 cm. Hitunglah jari-jari lingkaran luar segitiga tersebut!
2. Diketahui panjang sisi-sisi sebuah segitiga adalah 23 cm, 27, dan 32 cm. Hitunglah jari-jari lingkaran dalam segitiga tersebut!
3. Diketahui panjang sisi-sisi sebuah segitiga adalah 8 cm, 12, dan 22 cm. Hitunglah:
   a. Jari-jari lingkaran dalam segitiga
   b. Keliling lingkaran dalam segitiga
   c. Luas lingkaran dalam segitiga
4. Diketahui panjang sisi-sisi sebuah segitiga adalah 7 cm, 11, dan 18 cm. Hitunglah:
   a. Jari-jari lingkaran dalam segitiga
   b. Keliling lingkaran dalam segitiga
   c. Luas lingkaran dalam segitiga
5. Pada gambar di samping, OD adalah jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC. Jika $AB = 13$ cm, $BC = 9$ cm, dan $AC = 6$ cm, hitunglah:
   a. Luas segitiga ABC
   b. Panjang OD
   c. Luas lingkaran
   d. Luas daerah yang diarsir

C
O
A
D
B

E Sudut Pusat dan Sudut eliling

Perhatikan gambar di samping kiri! Kalian sudah mengerti apa yang dimaksud dengan sudut pusat? Sudut pusat adalah sudut yang titik sudutnya merupakan titik pusat lingkaran. Maka $\angle AOB$ dan $\angle COD$ adalah sudut pusat lingkaran. $\angle AOB$ menghadap $\overset{\frown}{AB}$ sedangkan $\angle COD$ menghadap $\overset{\frown}{CD}$.

Selanjutnya, perhatikan gambar di samping kanan! $\angle PAB$ dan $\angle ABQ$ merupakan sudut dengan titik sudut tepat berada di lingkaran. Sudut seperti inilah yang dinamakan dengan sudut keliling. $\angle PAB$ menghadap $\overset{\frown}{PB}$, dan $\angle ABQ$ menghadap $\overset{\frown}{AQ}$.

1 Hubungan Sudut Pusat dan Sudut Keliling

Adakah hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling suatu lingkaran? Jawabannya adalah ya, tetapi dengan syarat sudut pusat dan sudut keliling tersebut menghadap busur yang sama. Untuk mengetahui hubungan tersebut, perhatikan uraian berikut ini.

Perhatikan gambar! $\angle RPQ$ adalah sudut keliling dan $\angle ROQ$ adalah sudut pusat dengan menghadap busur yang sama, yaitu $\overset{\frown}{RQ}$. OQ, OP, dan OR adalah jari-jari lingkaran, $OQ = OP = OR$, sehingga ΔOPR dan ΔOPQ merupakan segitiga sama kaki, maka $\angle PRO = \angle RPO$, dan $\angle PQO = \angle QPO$.

$\angle ROS$ adalah sudut luar ΔOPR, maka $\angle ROS = \angle PRO + \angle RPO$, dan $\angle QOS$ adalah sudut luar ΔOPQ, maka $\angle QOS = \angle PQO + QPO$. Sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk berikut.

$$\begin{aligned}\angle ROQ &= \angle ROS + \angle QOS\\ &= (\angle PRO + \angle RPO) + (\angle PQO + \angle QPO)\\ &= 2\,\angle RPO + 2\,\angle QPO\\ &= 2\,(\angle RPO + \angle QPO)\\ &= 2\,\angle RPQ\end{aligned}$$

Maka dapat disimpulkan bahwa:

> Jika sudut pusat dan sudut keliling suatu lingkaran menghadap busur yang sama, maka berlaku:
>
> $$\text{Sudut pusat} = 2 \times \text{sudut keliling}$$
>
> $$\text{Sudut keliling} = \frac{1}{2} \times \text{sudut pusat}$$

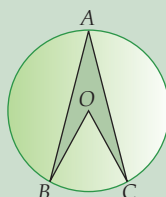
Contoh

1. Berdasarkan gambar di samping, jika $\angle BOC = 60^\circ$, hitunglah besar $\angle BAC$!

   Penyelesaian:

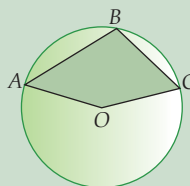
   $\angle BAC$ dan $\angle BOC$ menghadap busur yang sama, yaitu busur BC, maka:

   $$\angle BAC = \frac{1}{2} \times BOC$$
   $$= \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

   Jadi, besar $\angle BAC = 30^\circ$.

2. Berdasarkan gambar di samping, jika $\angle AOC = 72^\circ$, hitunglah besar $\angle ABC$!

   Penyelesaian:

   Perhatikan gambar tersebut.

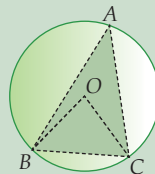
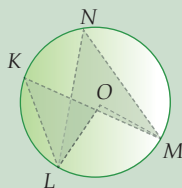
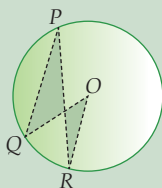
   $\angle ABC$ adalah sudut keliling yang menghadap busur AC yang besar, maka kita harus menghitung *sudut refleks* AOC.

   $$\text{Sudut refleks } AOC = 360^\circ - \angle AOC$$
   $$= 360^\circ - 72^\circ = 288^\circ$$

   $\angle ABC$ dan sudut refleks AOC menghadap busur AC yang besar, maka:

   $$\angle ABC = \frac{1}{2} \times \text{sudut refleks } AOC$$
   $$= \frac{1}{2} \times 288^\circ = 144^\circ$$

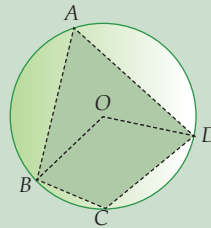
   Jadi, besar $\angle ABC = 144^\circ$

Latihan Soal

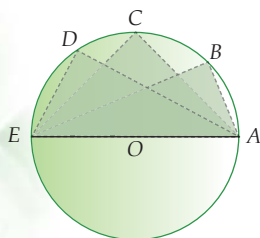
1.

Perhatikan gambar di atas, jika $\angle QPR = 23^0$, $\angle MOL = 56^0$, $\angle BAC = 32^0$, dan $\angle OAC = 19^o$, hitunglah besar:

a. *QOR* c. *MNL* e. *MKL*
b. *BOC* d. *BCO* f. *OBA*

2. Pada gambar di samping, $\angle BAD = 35^o$.

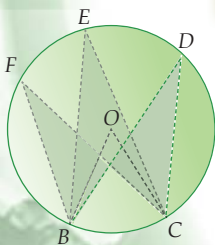
   Hitunglah:
   a. $\angle BOD$
   b. Sudut refleks *BOD*
   c. $\angle BCD$

2 Sifat Sudut-Sudut Keliling

Terdapat dua macam sifat sudut-sudut keliling, yaitu sudut-sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran dan sudut-sudut keliling yang menghadap busur yang sama. Bagaimanakah sifatnya? Untuk menjawabnya, perhatikan uraian berikut.

a. Sudut-Sudut Keliling yang Menghadap Diameter Lingkaran

Pada gambar di samping, garis *AE* adalah diameter lingkaran. *AEB* adalah sudut keliling dan $\angle AOE$ adalah sudut pusat dengan menghadap busur yang sama, yaitu $\overset{\frown}{AE}$. Maka,

$$\angle AEB = \frac{1}{2} \times \angle AOE = \frac{1}{2} \times 180^o = 90^o$$

Dengan cara yang sama, cobalah kamu cari besar $\angle ACE$ dan $\angle ADE$! Apakah hasilnya sama? Jika kamu memahaminya, pasti kamu akan mendapatkan nilai sudut yang sama. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa:

> Jika sudut keliling suatu lingkaran menghadap diameter lingkaran, maka besar sudut keliling sama dengan 90^o.

b. Sudut-Sudut Keliling yang Menghadap Busur yang Sama

Berdasarkan gambar di samping, $\angle BOC$ adalah sudut pusat, sedangkan $\angle CDB$, $\angle CEB$, dan $\angle CFB$ adalah sudut lingkaran. Sudut pusat dan ketiga sudut lingkaran ini menghadap busur yang sama, yaitu $\overset{\frown}{BC}$. Ditulis secara matematis sebagai berikut.

$\angle CDB = \frac{1}{2} \times \angle BOC$

$\angle CEB = \frac{1}{2} \times \angle BOC$

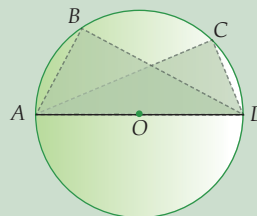
$\angle CFB = \frac{1}{2} \times \angle BOC$

Jadi, $\angle CDB = \angle CEB = \angle CFB$. Sehingga dapat disimpulkan:

> Jika sudut-sudut keliling menghadap busur yang sama, maka besar sudut-sudut keliling tersebut adalah sama.

Contoh

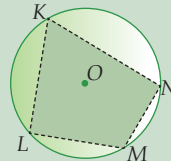
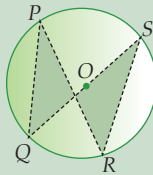
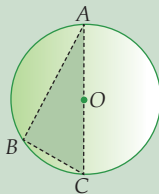
Perhatikan gambar di samping.
Hitunglah:

a. $\angle ACD$
b. $\angle ABD$

Penyelesaian:

a. $\angle ACD$ merupakan sudut keliling yang menghadap diameter AD, maka $\angle ACD = 90^\circ$.

b. $\angle ABD = \angle ACD$ (menghadap busur yang sama) $= 90^\circ$.

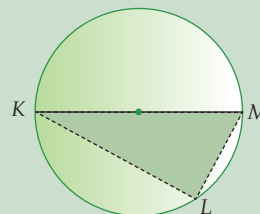
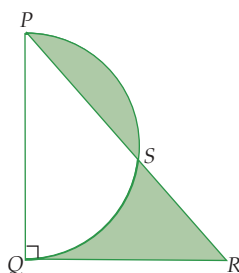
Latihan Soal

1.

   Pada gambar di atas, $\angle BAC = 27^0$, $\angle QPR = 36^0$, $\angle PRS = 29^0$, $\angle KLM = 112^0$, $\angle LMN = 136^\circ$, dan AC adalah diameter lingkaran. Hitunglah:

   a. $\angle CBA$ c. $\angle QSR$ e. $\angle KNM$
   b. $\angle BCA$ d. $\angle PQS$ f. $\angle LKN$

2. Pada gambar di samping, $\angle LKM = 3x^\circ$, $\angle LMK = 5x^0$, dan KM adalah diameter lingkaran. Hitunglah:

   a. $\angle MLK$ c. $\angle LKM$
   b. Nilai x d. $\angle LMK$

Otak-Atik Matematika

Pada gambar di bawah, $PQ = QR = 7$ cm. PSQ adalah setengah lingkaran. Hitunglah daerah yang diarsir!

Rangkuman

1. Lingkaran adalah kumpulan titik-titik pada garis lengkung yang mempunyai jarak yang sama terhadap pusat lingkaran.
2. Daerah yang dibatasi oleh kumpulan titik-titik pada tepi lingkaran disebut daerah lingkaran (luas lingkaran).
2. π (*phi*) adalah nilai perbandingan antara keliling lingkaran dengan diameter lingkaran.
3. Untuk setiap lingkaran, berlaku rumus:

   keliling $= 2\pi r$ atau keliling $= \pi \times d$

   luas $= \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$

   dengan: r = jari-jari

   d = diameter

   $\pi = \frac{22}{7}$ atau 3,14
4. Jika panjang jari-jari sebuah lingkaran kedua adalah n kali jari-jari lingkaran pertama, maka luas lingkaran kedua adalah n^2 kali luas lingkaran pertama.
5. Jika sudut pusat dan sudut keliling suatu lingkaran menghadap busur yang sama, maka berlaku:

   sudut pusat $= 2 \times$ sudut keliling

   sudut keliling $= \frac{1}{2} \times$ sudut pusat
6. Jika sudut keliling suatu lingkaran menghadap diameter lingkaran, maka besar sudut keliling sama dengan 90°.
7. Jika sudut-sudut keliling menghadap busur yang sama, maka besar sudut-sudut keliling tersebut adalah sama.

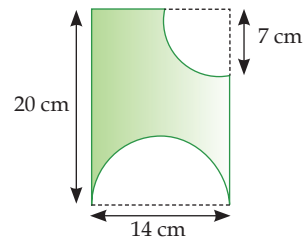
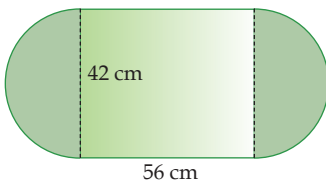
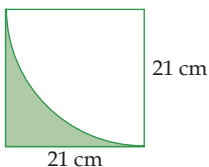
Uji Kemampuan

A. Pilihlah satu jawaban yang paling tepat, a, b, c, atau d! Tuliskan pada lembar jawabanmu!

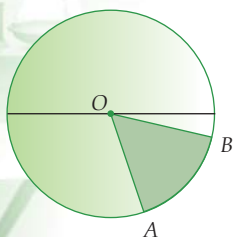
1. Keliling sebuah lingkaran 43,96 cm. Jika π = 3,14, maka panjang jari-jarinya adalah ....
   a. 4,5 cm c. 10 cm
   b. 7 cm d. 12 cm

2. Luas lingkaran yang kelilingnya 31,4 cm adalah ....
   a. 78,5 cm^2 c. 80,5 cm^2
   b. 76,5 cm^2 d. 82,5 cm^2

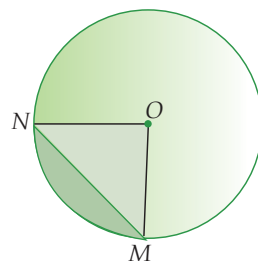
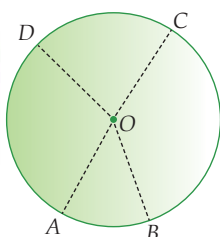
3. Sebuah roda yang berputar sebanyak 25 kali dapat menempuh jarak 22 m. Jika $\pi = \frac{22}{7}$, maka luas permukaan roda itu adalah ....
   a. 576 cm^2 c. 736 cm^2
   b. 616 cm^2 d. 806 cm^2

4. Luas bangun pada gambar di samping adalah ....
   a. 164,5 cm^2
   b. 173,5 cm^2
   c. 183,5 cm^2
   d. 193,5 cm^2

5. 42 cm
   56 cm
   Keliling bangun pada gambar di samping adalah ....
   a. 164 cm c. 244 cm
   b. 184 cm d. 254 cm

6.

   Luas daerah yang di arsir pada gambar di samping adalah ....
   a. 63 cm^2 c. 83 cm^2
   b. 73 cm^2 d. 94,5 cm^2

7. Sebuah taman berbentuk lingkaran dengan diameter 35 m. Sekeliling taman itu setiap 2 m ditanami pohon. Banyaknya pohon agar sekeliling taman ditanami pohon adalah ....
   a. 55 buah c. 45 buah
   b. 65 buah d. 35 buah

8. Pada gambar berikut, besar $\angle AOB = 66^\circ$ dan panjang $OA = 21$ cm. Panjang busur AB adalah ….

a. 13,2 cm² c. 52,2 cm²
b. 24,2 cm² d. 64,2 cm²

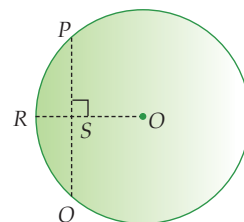
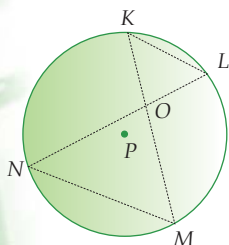
9. Besar $\angle MON = 90^\circ$. Panjang jari-jari $OM = ON = 14$ cm. Luas daerah yang di arsir (tembereng) adalah ….

a. 56 cm²
b. 59 cm²
c. 62 cm²
d. 71 cm²

10.

Pada gambar di samping, besar $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle COD = 78^\circ$, dan panjang busur $AB = 15$ cm. Panjang busur CD adalah ….

a. 39 cm c. 37 cm
b. 49 cm d. 47 cm

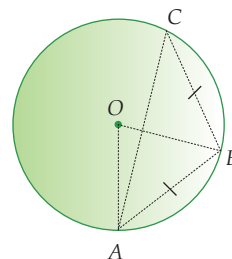
11. Pada gambar di samping, panjang $OR = 15$ cm dan $RS = 3$ cm. Panjang tali busur PQ adalah ….

a. 16 cm c. 20 cm
b. 18 cm d. 22 cm

12.

Pada gambar di samping, besar $\angle MNL = 28^\circ$ dan $\angle NLK = 36^\circ$. Besar $\angle NOM$ adalah ….

a. 77° c. 89°
b. 102° d. 116°

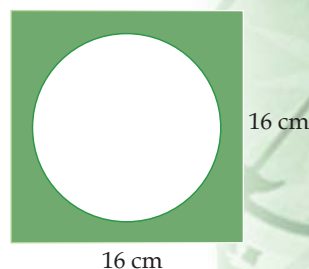
13. Pada gambar di samping, panjang $AB = BC$ dan besar $\angle ABO = 42^\circ$. Besar $\angle CBO$ adalah ….

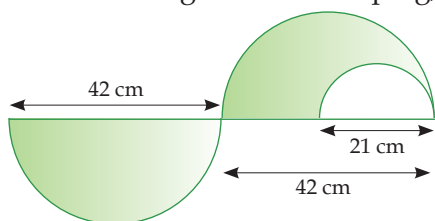
a. 40° c. 84°
b. 42° d. 92°

14. Panjang sisi-sisi segitiga siku-siku adalah 6 cm, 8 cm, dan 10 cm. Keliling lingkaran dalam segitiga tersebut adalah ....
   a. 12,56 cm
   b. 13,56 cm
   c. 14,56 cm
   d. 15,56 cm

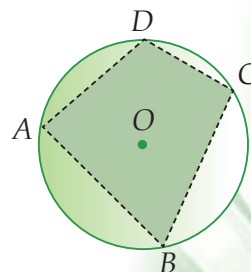
15. Panjang sisi sebuah segitiga adalah 18 cm, 24 cm, dan 30 cm. Luas lingkaran luar segitiga tersebut adalah ....
   a. 706,5 cm²
   b. 746,5 cm²
   c. 774,5 cm²
   d. 764,5 cm²

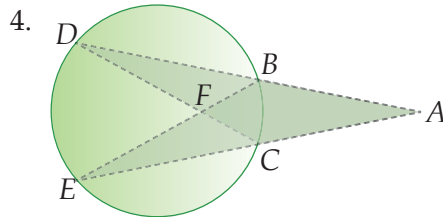
16. Besar sudut segi enam beraturan adalah ....
   a. 30°
   b. 60°
   c. 75°
   d. 90°

17. Perhatikan gambar di samping! Jika sisi-sisi persegi berukuran 16 cm, dan diameter lingkaran sama dengan 14 cm, maka luas daerah yang diarsir adalah ....
   a. 96 cm²
   b. 98 cm²
   c. 100 cm²
   d. 102 cm²

18. Diameter sebuah roda sama dengan 42 cm. Jika roda tersebut berputar sebanyak 300 kali, maka panjang lintasan yang sudah dilalui roda tersebut adalah ....
   a. 396 m
   b. 396 cm
   c. 396 dm
   d. 39,6 m

B. Selesaikan soal-soal berikut ini!

1. Berdasarkan gambar di samping, hitunglah:

   a. Keliling daerah yang di arsir
   b. Luas daerah yang di arsir

2. Pada gambar di samping, diketahui $\angle BCD = 7x$ dan $\angle BAD = 6x$. Tentukan :
   a. Nilai x
   b. Besar $\angle BCD$ dan $\angle BAD$
   c. Jika $\angle ADC = 112^\circ$, hitunglah besar $\angle ABC$!

3. Diketahui panjang sisi sebuah segitiga adalah 8 cm, 15 cm, dan 17 cm. Hitunglah:
   a. Luas lingkaran dalam segitiga
   b. Keliling lingkaran luar segitiga

4.

   Pada gambar di samping, $\angle EFD = 61^\circ$ dan $\angle EAD = 43^\circ$. Tentukan besar $\angle EAD$!

5. Sebuah taman berbentuk lingkaran berjari-jari 40 m. Di sekeliling tepinya dibuat jalan melingkar mengelilingi taman yang lebarnya 2 m. Jika biaya untuk membuat jalan tiap 1 m^2 adalah Rp 25.000, hitunglah biaya seluruh pembuatan jalan tersebut!

KUNCI JAWABAN BAB 6

A. Pilihan Ganda

1. b
3. b
5. c
7. a
9. a
11. b
13. b
15. a
17. d

B. **Uraian**

1. a. 165 cm
   b. 173,25 cm^2
3. a. 28,26 cm^2
   b. 53,38 cm
5. Rp 13.000.000,00

Bab

Garis Singgung Lingkaran

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini siswa diharapkan mampu:

- Menemukan sifat sudut yang dibentuk oleh garis yang melalui titik pusat dan garis singgung lingkaran;
- Mengenali bahwa melalui suatu titik pada lingkaran hanya dapat dibuat satu garis singgung pada lingkaran tersebut;
- Melukis dan menghitung panjang garis singgung yang ditarik dari sebuah titik di luar lingkaran;
- Membuat dan menggambar dua garis singgung lingkaran yang melalui satu titik di luar lingkaran;
- Menyebutkan syarat kedudukan dua lingkaran berpotongan, bersinggungan, dan saling lepas;
- Melukis dan menghitung panjang garis singgung persekutuan dalam dan garis singgung persekutuan luar dua lingkaran;
- Menghitung panjang sabuk lilitan minimal yang menghubungkan beberapa lingkaran dengan rumus.

(Sumber: CD Photo image)

Perhatikanlah sebuah sepeda. Sepeda mempunyai dua buah gir, yaitu gir belakang pada roda dan gir depan pada pedal. Agar roda sepeda dapat berputar, gir belakang dihubungkan dengan gir depan melalui rantai. Gir sepeda berbentuk lingkaran. Sedangkan rantai sepeda yang bersinggungan dengan gir dapat diumpamakan sebagai garis singgung lingkaran. Apabila jari-jari kedua gir dan jarak antara kedua roda gir diketahui, maka panjang rantai sepeda dapat ditentukan. Bagaimanakah caranya?

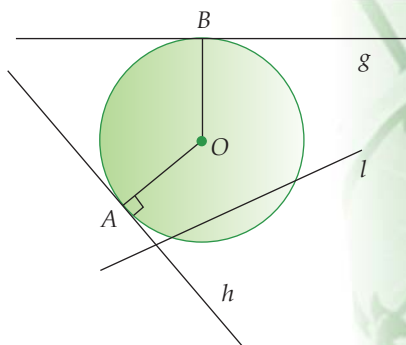
Peta konsep

Garis singgung lingkaran
A. Mengenal sifaf garis singgung lingkaran
B. Melukis garis singgung lingkaran
1. Melukis garis singgung lingkaran yang melalui titik tepat pada lingkaran
2. Melukis garis singgung lingkaran yang melalui titik di luar lingkaran
C. Panjang garis singgung lingkaran
D. Kedudukan dua lingkaran
E. Melukis garis singgung persekutuan dua lingkaran
1. Melukis garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran
2. Melukis garis singgung persekutuan luar dua lingkaran
F. Panjang garis singgung persekutuan dua lingkaran
1. Panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran
2. Panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran
G. Menghitung panjang sabuk lilitan minimal

Mengenal Sifat aris Singgung Lingkaran

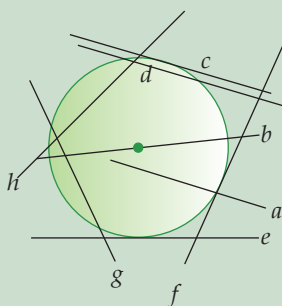
Selain rantai sepeda, masih banyak contoh lain yang berhubungan dengan garis singgung lingkaran. Misalnya, rantai roda tank, rantai sepeda motor, dan tali kipas mesin.

Pada bab 7 ini, kita akan membahas materi tentang garis singgung lingkaran. Apakah garis singgung lingkaran itu? Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar di samping.

Gambar disamping merupakan lingkaran yang berpusat di O. Lingkaran tersebut bersinggungan dengan garis g dan h. Garis g memotong lingkaran di satu titik, yaitu di titik A. Sedangkan garis h memotong lingkaran di satu titik, yaitu di titik B. Garis g dan h inilah yang dinamakan garis singgung. Sedangkan titik B dan titik A dinamakan titik singgung. Jadi yang dimaksud dengan garis singgung lingkaran adalah suatu garis yang memotong lingkaran *tepat di satu titik*. Coba jelaskan mengapa garis l bukan termasuk garis singgung lingkaran?

Perhatikan kembali gambar di atas. Garis g dan garis h tegak lurus OB dan OA, sedangkan OB dan OA adalah jari-jari lingkaran. Jadi, garis singgung lingkaran akan *tegak lurus* dengan jari-jari lingkaran yang melalui titik singgungnya.

Dapatkah kita membuat garis singgung lainnya di titik A dan di titik B? Ternyata, bagaimanapun caranya, kita tidak akan bisa membuat garis singgung yang lain di titik A dan di titik B. Dengan demikian, kita hanya dapat membuat *satu garis singgung lingkaran* dari satu titik pada sebuah lingkaran.

Contoh

Perhatikan gambar di bawah ini!

Garis c, e, dan f adalah garis singgung lingkaran karena memotong lingkaran di satu titik dan tegak lurus dengan jari-jari melalui titik singgungnya.

Garis a, b, d, g, dan h bukan garis singgung lingkaran karena jika garisnya diperpanjang, akan memotong lingkaran di dua titik.

B Melukis aris Singgung Lingkaran

Untuk melukis sebuah garis singgung lingkaran, kita memerlukan alat bantu berupa jangka dan penggaris. Melukis garis singgung lingkaran dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu melukis garis singgung lingkaran melalui titik yang tepat berada di lingkaran atau melalui titik yang berada di luar lingkaran.

1 Melukis Garis Singgung Lingkaran yang Melalui Titik Tepat Pada Lingkaran

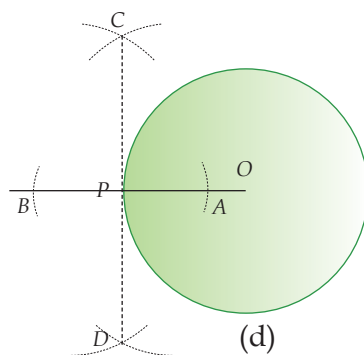
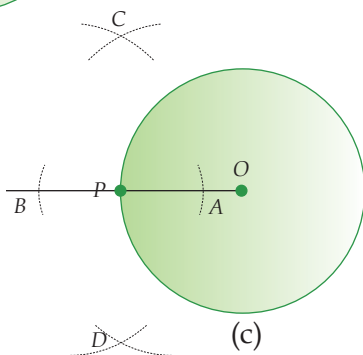
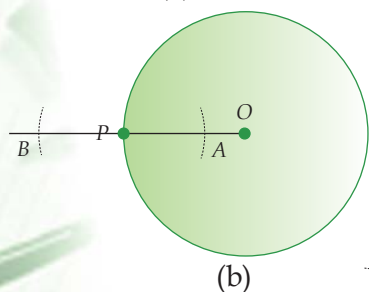
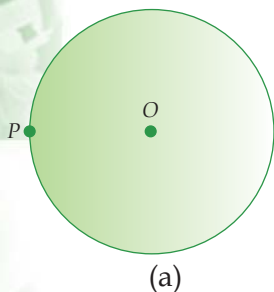
Misalkan titik P berada tepat pada lingkaran dengan titik pusat O. Maka untuk melukis garis singgung yang melalui titik P dan tegak lurus dengan jari-jari lingkaran, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

1. Lukis sebuah lingkaran dengan pusat di titik O kemudian buatlah sebuah titik P yang tepat berada pada lingkaran seperti terlihat pada gambar (a).
2. Tarik garis dari O ke P dan perpanjanglah garis tersebut. Kemudian lukis sebarang busur dengan pusat di P sehingga memotong di garis OP dan garis perpanjangan OP, yaitu di titik A dan titik B (gambar (b)).
3. Lukis kembali sebarang busur dengan pusat di titik A dan B dengan jari-jari yang sama, sehingga berpotongan di titik C dan di titik D (gambar (c)).
4. Tarik garis yang menghubungkan titik C dan titik D. Garis CD ini dinamakan garis singgung lingkaran yang melalui titik tepat pada lingkaran (gambar (d)).

(a)

(b)

(c)

(d)

2 Melukis Garis Singgung Lingkaran yang Melalui Titik di Luar Lingkaran

Perhatikan gambar di samping!

DQ merupakan garis singgung lingkaran yang melalui titik di luar lingkaran. Maka untuk melukis garis singgung lingkaran yang melalui titik di luar lingkaran, kita harus melukis garis *DQ* yang tegak lurus dengan garis *OD*, dimana *OD* adalah jari-jari lingkaran.

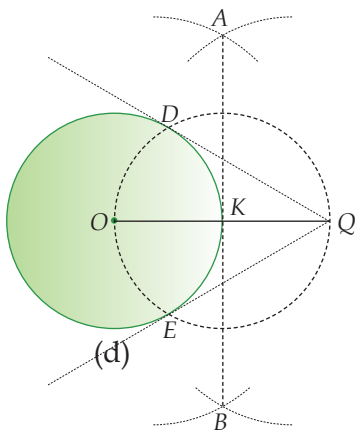
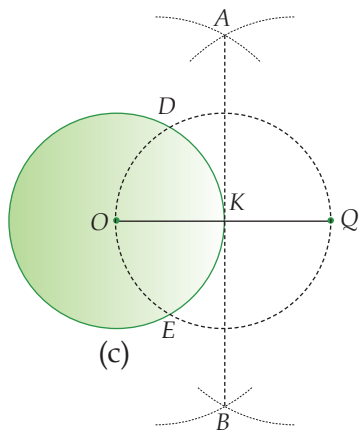
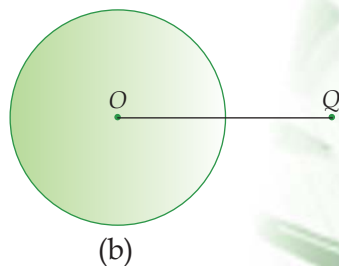
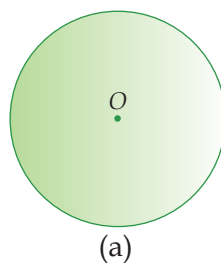
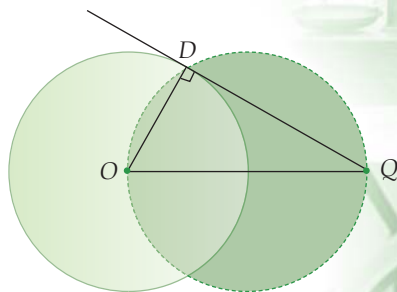
Jika kita perhatikan, $\angle ODQ$ adalah sudut siku-siku. Agar $\angle ODQ$ siku-siku, maka sudut tersebut harus menghadap diameter *OQ* (ingat sifat sudut keliling yang menghadap diameter), sehingga kita harus membuat lingkaran dengan diameter *OQ*.

Berdasarkan uraian di atas, untuk melukis garis singgung lingkaran yang melalui titik di luar lingkaran, langkah-langkah yang harus dilakukan adalah sebagai berikut.

(a)

1. Lukis sebuah lingkaran dengan titik pusat *O*, kemudian buat sebuah titik *Q* yang berada di luar lingkaran (gambar(a)).
2. Tarik garis dari *O* ke *Q*, kemudian lukis sebarang busur dengan pusat di titik *O* dan di titik *Q* dengan jari-jari yang sama, sehingga berpotongan di titik *A* dan di titik *B* (gambar(b)).
3. Hubungkan titik *A* dengan titik *B* sehingga memotong garis *OQ* di titik *K*. Kemudian lukis sebuah lingkaran dengan jari-jari sepanjang *KQ* dan berpusat di titik *K* sehingga memotong lingkaran yang berpusat di *O*, di titik *D* dan *E* (gambar(c)).

(b)

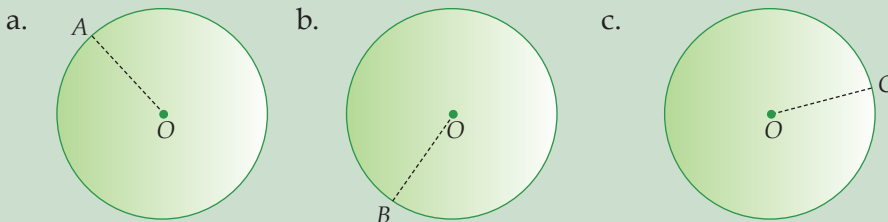
(c) (d)

Tokoh

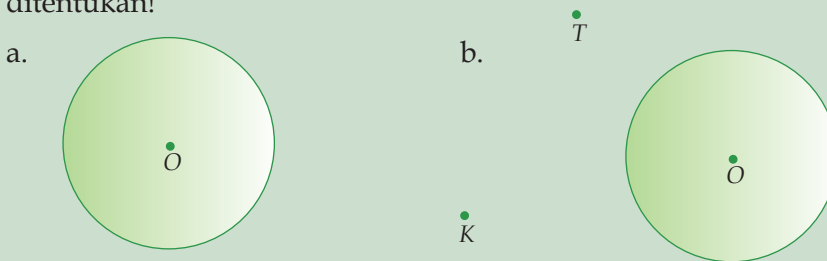
Hipparchus dari Nicea (170-125 SM) adalah ilmuwan asal Yunani yang terkenal karena membagi lingkaran menjadi 360^0. Dia takjub akan astronomi dan mempelajari sifat-sifat bola untuk mengetahui planet bumi.

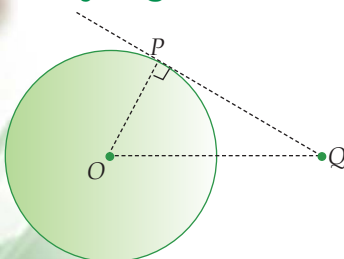
(*Sumber: Encarta*)

4. Lukis garis yang menghubungkan titik D dengan titik Q dan titik E dengan titik Q. Garis DQ dan EQ inilah yang dinamakan dengan garis singgung lingkaran yang melalui titik di luar lingkaran (gambar(d)).

Latihan Soal

1. Jiplaklah gambar di bawah ini. Kemudian lukislah garis singgung pada lingkaran melalui titik yang tepat pada lingkaran yang telah ditentukan!

a.
b.
c.
2. Jiplaklah gambar di bawah ini. Kemudian lukislah garis singgung pada lingkaran melalui titik yang berada di luar lingkaran yang telah ditentukan!

a.
b.
T
K

3. Lukislah garis singgung pada lingkaran yang berpusat di O dengan jari-jari 4 cm melalui titik P yang berada di luar lingkaran, dengan OP 6 cm!

C Panjang aris Singgung Lingkaran

Untuk mengetahui panjang garis singgung lingkaran, perhatikan gambar di samping! PQ adalah garis singgung lingkaran yang tegak lurus dengan OP, dimana OP merupakan jari-jari lingkaran, dan OQ jarak antara titik pusat lingkaran dengan titik yang berada di luar lingkaran.

Jika kamu perhatikan dengan jelas, ΔOPQ adalah segitiga siku-siku dengan siku-siku di P. Berdasarkan teorema Phythagoras dapat dinyatakan sebagai berikut.

$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

$PQ^2 = OQ^2 - OP^2$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa panjang garis singgung lingkaran adalah:

$$g^2 = p^2 - r^2$$

dengan: g : Panjang garis singgung

p : Jarak antara titik pusat lingkaran dengan titik yang berada di luar lingkaran

r : Jari-jari lingkaran

Contoh

Panjang garis singgung yang melalui titik di luar lingkaran adalah 12 cm. Panjang jari-jari lingkarannya 5 cm. Hitunglah jarak antara titik tersebut dengan pusat lingkarannya!

Penyelesaian:

Jari-jari lingkaran (r) = 5 cm

Panjang garis singgung (g) = 12 cm

Maka, $g^2 = p^2 - r^2$

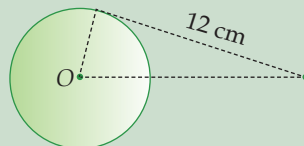
$12^2 = p^2 - 5^2$

$144 = p^2 - 25$

$p^2 = 144 + 25 = 169$

$p = \sqrt{169} = 13$ cm

O

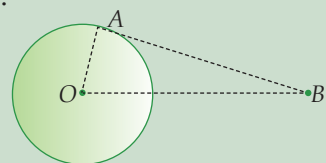
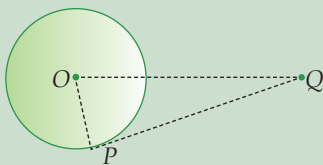
12 cm

Jadi, jarak antara titik dengan pusat lingkaran adalah 13 cm.

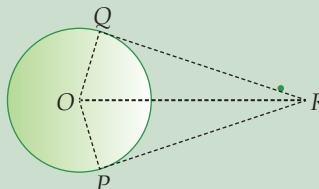
Latihan Soal

1. Jarak antara sebuah titik yang berada di luar lingkaran dengan pusat lingkaran adalah 25 cm. Panjang jari-jari lingkarannya 7 cm. Hitunglah Panjang garis singgung yang melalui titik tersebut!
2. Pada gambar di samping, AB adalah garis singgung lingkaran. Panjang jari-jari OA adalah 8 cm dan jarak OB = 17 cm. Hitunglah panjang garis AB!

A

O

B

3. Pada gambar di samping, OP adalah jari-jari lingkaran. Panjang garis singgung lingkaran PQ = 30 cm. Jarak sebuah titik dengan pusat lingkaran OQ = 34 cm. Hitunglah panjang OP!

4. Pada gambar berikut, panjang jari-jari $OP = OQ$ = 6 cm dan panjang OR = 10 cm. Hitunglah:
   a. panjang QR
   b. luas segitiga OQR
   c. luas layang-layang $OQRP$
   d. panjang tali busur PQ

D edudukan Dua Lingkaran

Math Info

Kajian tentang lingkaran menghasilkan prinsip-prinsip yang memberi bentuk terbaik untuk roda-roda gir, sehingga saling bersinggungan sempurna pada saat mengelilingi satu dengan yang lainnya.

Dari dua buah lingkaran yang ada, kita dapat mengetahui beberapa kemungkinan kedudukan dari lingkaran-lingkaran tersebut. Misalkan terdapat dua buah lingkaran, yaitu lingkaran yang berpusat di titik A, sebutlah lingkaran A, dengan jari-jari r_1. Sedangkan yang satunya lagi, lingkaran yang berpusat di titik B, sebutlah lingkaran B, dengan jari-jari r_2. Apabila ditarik sebuah garis yang menghubungkan kedua titik pusat tersebut, maka akan terbentuk sebuah garis yang sekarang ini kita kenal dengan istilah garis pusat.

Pada gambar berikut ini, disajikan beberapa kemungkinan kedudukan dua buah lingkaran.

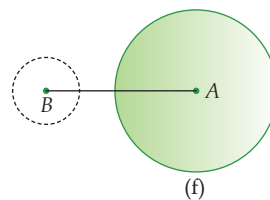
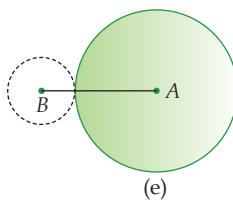
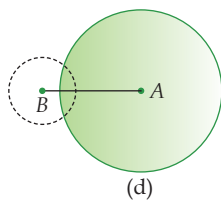
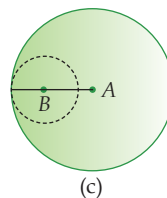
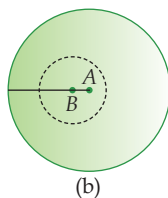
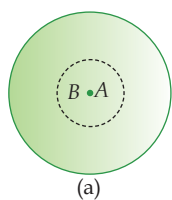
(a)

(b)

(c)

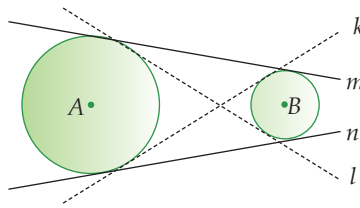
(d)

(e)

(f)

Tugas

1. Berdasarkan gambar di atas, coba kalian sebutkan kedudukan dua lingkaran berikut.
   a. Dua lingkaran yang saling berimpit.
   b. Dua lingkaran yang saling berpotongan.
   c. Dua lingkaran yang saling bersinggungan.
   d. Satu lingkaran berada di dalam lingkaran yang lainnya.
   e. Dua lingkaran yang saling lepas.
2. Tentukan hubungan antara panjang garis sentral atau garis pusat dua lingkaran (garis AB) tersebut dengan jari-jari masing-masing lingkaran (r_1 dan r_2) pada gambar! Diskusikanlah dengan teman sebangkumu!
3. Buatlah kesimpulan mengenai syarat-syarat kedudukan dua lingkaran pada kegiatan no.1 berdasarkan kegiatan no.2!

E Melukis aris Singgung Persekutuan Dua Lingkaran

Perhatikan gambar di samping! Garis k, l, m, dan n adalah garis singgung dua buah lingkaran. Garis-garis tersebut menyinggung dua buah lingkaran secara bersamaan.

Garis k dan l dinamakan garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran, sedangkan garis m dan n dinamakan garis singgung persekutuan luar dua lingkaran.

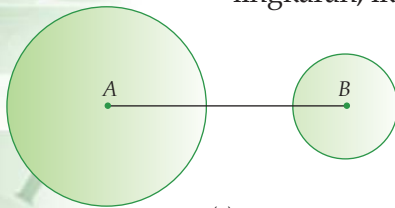
Tugas

Salinlah kembali semua kedudukan dua lingkaran yang ada pada gambar! Kemudian cobalah kamu gambarkan garis singgung persekutuan dalam maupun garis singgung persekutuan luar dua lingkarannya. Apakah semua kedudukan dua lingkaran memiliki garis singgung persekutuan dua lingkaran? Sebutkan banyaknya garis singgung persekutuan dua lingkaran yang dapat kamu buat!

Bagaimanakah melukis garis singgung persekutuan dalam maupun garis singgung persekutuan luar dua buah lingkaran yang tepat? Untuk lebih jelasnya, perhatikan uraian berikut.

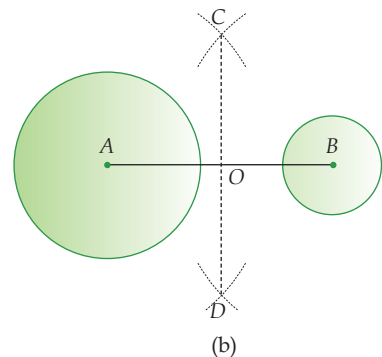
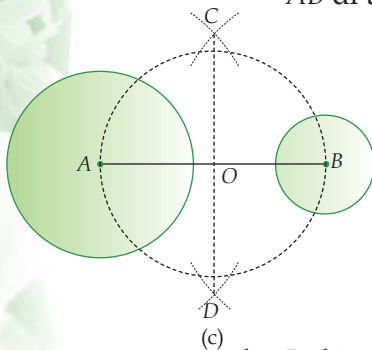
1 Melukis Garis Singgung Persekutuan Dalam Dua Lingkaran

Untuk melukis garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran, ikutilah langkah-langkah berikut ini.

(a)

a. Lukis dua buah lingkaran yang saling lepas. Jari-jari lingkaran A sama dengan r_1 dan besar jari-jari lingkaran B sama dengan r_2. Kemudian tarik garis yang menghubungkan kedua titik pusat lingkaran tersebut (gambar (a)).

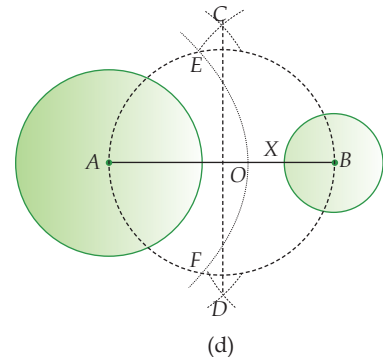
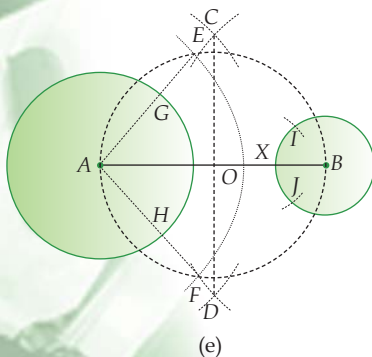
b. Lukis sebarang busur di titik A dan B dengan panjang jari-jari sama, sehingga berpotongan di titik C dan D. Kemudian tarik garis yang menghubungkan titik C dan D, sehingga memotong garis AB di titik O (gambar (b)).

(b)

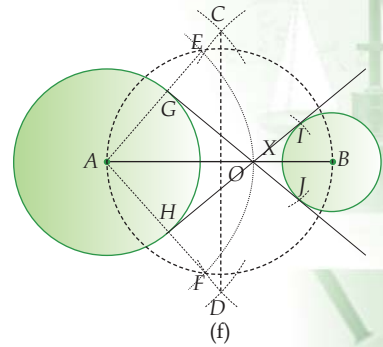
(c)

c. Lukis sebuah lingkaran yang berpusat di O dengan jari-jari sepanjang AO (gambar (c)).

d. Lukis sebuah busur dengan pusat di titik A dan jari-jari sepanjang AX, dimana $AX = r_1 + r_2$, sehingga busur tersebut memotong lingkaran O di titik E dan F (gambar (d)).

(d)

(e)

e. Tarik sebuah garis yang menghubungkan titik A dan E sehingga memotong lingkaran A di titik G. Kemudian lukis busur lingkaran dengan pusat di G dan jari-jari sepanjang BE sehingga memotong lingkaran B di titik I. Ulangi langkah di atas, sehingga terbentuk garis AF, titik H, dan titik J (gambar (e)).

f. Hubungkanlah titik G dengan titik J dan titik H dengan titik I, sehingga terbentuk garis GJ dan HI. Garis GJ dan HI inilah yang dinamakan dengan garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran yang berpusat di A dan B (gambar (f)).

(f)

Melukis Garis Singgung Persekutuan Luar Dua Lingkaran

Langkah-langkah yang harus dilakukan untuk melukis garis singgung persekutuan luar dua lingkaran adalah sebagai berikut.

(a)

a. Lukis dua buah lingkaran yang saling lepas. Misalkan lingkaran A dengan jari-jari r_1 dan lingkaran B dengan jari-jari r_2. Kemudian tarik garis yang menghubungkan kedua titik pusat lingkaran tersebut (gambar (a)).

b. Lukis sebarang busur di titik A dan B dengan panjang jari-jari sama, sehingga berpotongan di titik C dan D. Kemudian tarik garis yang menghubungkan titik C dan D, sehingga memotong garis AB di titik O (gambar (b)).

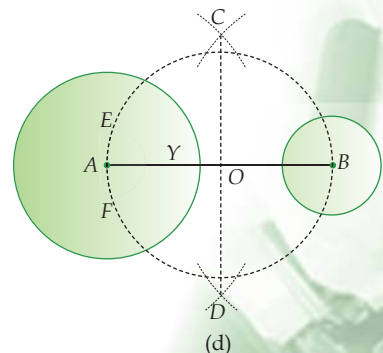
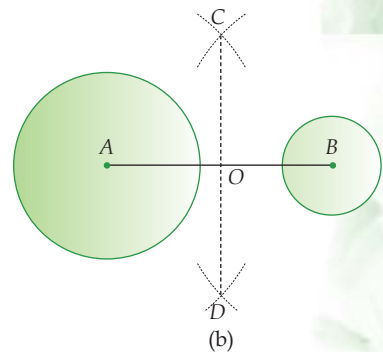
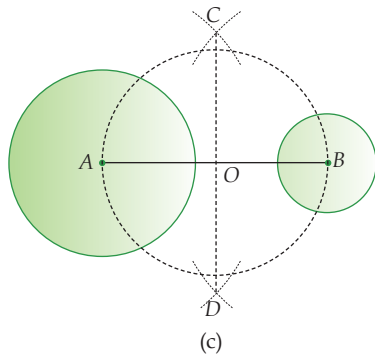
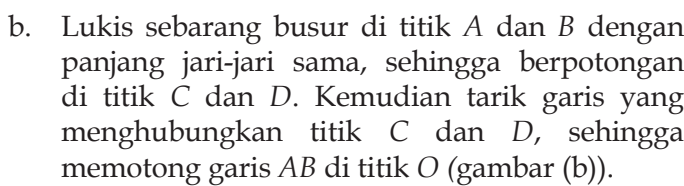
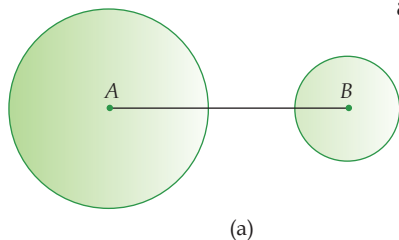
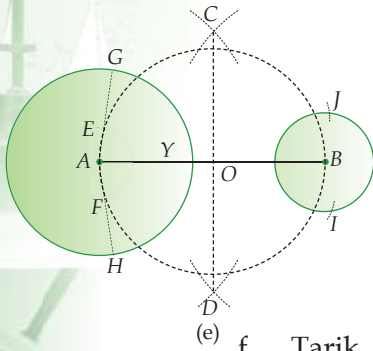
(b)

(c)

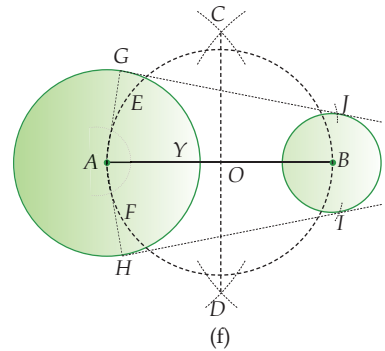
c. Lukis sebuah lingkaran yang berpusat di O dengan jari-jari sepanjang AO (gambar (c)).

(d)

d. Lukis sebuah busur dengan pusat di titik A dengan jari-jari sepanjang AY, dimana $AY = r_1 - r_2$, sehingga busur tersebut memotong lingkaran O di titik E dan F (gambar (d)).

(e)

e. Tarik garis yang menghubungkan titik A dan E, kemudian perpanjang garis AE sehingga memotong lingkaran A di titik G. Lalu lukislah busur dengan pusat di G dan jari-jari sepanjang BE, sehingga memotong lingkaran B di titik J. Ulangi langkah di atas, sehingga terbentuk garis AF, titik H, dan titik I (gambar (e)).

f. Tarik garis yang menghubungkan titik G dengan titik J dan titik H dengan titik I, sehingga terbentuk garis GJ dan HI. Garis GJ dan HI inilah yang dinamakan dengan garis singgung persekutuan luar dua lingkaran yang berpusat di A dan B (gambar (f)).

(f)

Tugas

1. Salin kembali salah satu gambar di atas! Coba kamu lukis garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran yang sesuai dengan langkah-langkah yang telah kita bahas.
2. Salin kembali salah satu gambar di atas! Coba kamu lukis garis singgung persekutuan luar dua lingkaran yang sesuai dengan langkah-langkah yang telah kita bahas.

Latihan Soal

1. Panjang jari-jari dua buah lingkaran yang berpusat di A dan B masing-masing 3 cm dan 4 cm. Jika jarak kedua pusat lingkaran 6 cm, lukislah garis singgung persekutuan dalam kedua lingkaran tersebut!
2. Panjang jari-jari dua buah lingkaran yang berpusat di P dan Q masing-masing 2 cm dan 5 cm. Jika jarak kedua pusat lingkaran 8 cm, lukislah garis singgung persekutuan dalam kedua lingkaran tersebut!
3. Panjang jari-jari dua buah lingkaran yang berpusat di C dan D masing-masing 3 cm dan 5 cm. Jika jarak kedua pusat lingkaran 10 cm, lukislah garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran tersebut!
4. Panjang jari-jari dua buah lingkaran yang berpusat di R dan S masing-masing 2 cm dan 2 cm. Jika jarak kedua pusat lingkaran 7 cm, lukislah garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran tersebut!

Panjang aris Singgung Persekutuan Dua Lingkaran

Pada subbab kali ini, kita akan membahas panjang garis singgung persekutuan dalam maupun garis singgung persekutuan luar dua lingkaran.

1 Panjang Garis Singgung Persekutuan Dalam Dua Lingkaran

Perhatikan gambar di samping! Lingkaran *A* berpusat di *A* dengan jari-jari $AD = r_1$. Lingkaran *B* berpusat di *B* dengan jari-jari $BE = r_2$. *AB* adalah jarak kedua titik pusat lingkaran (*s*). *CE* adalah garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran, dimana $CE \perp AC$. Melalui titik *B*, kita dapat menarik garis *BD* yang sejajar dengan garis *CE*. (*BD*//*CE*), sehingga $CD = BE = r_2$, dan $\angle ADB = 90^\circ$. Maka ΔADB adalah segitiga siku-siku, sehingga berlaku teorema Phythagoras, yaitu:

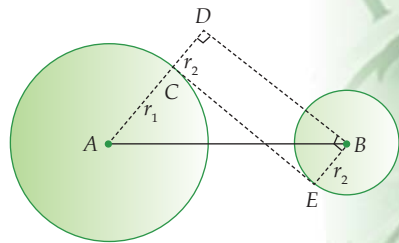
$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

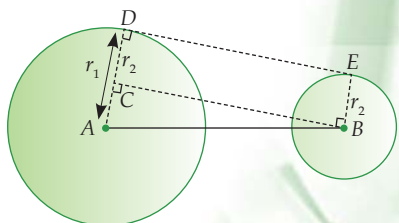
$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = AB^2 - (AC + CD)^2 = s^2 - (r_1 + r_2)^2$$

Karena *BD*//*CE* dan $\angle ADB = \angle ACE = 90^\circ$, maka $CE = BD$. Jadi, $CE^2 = s^2 - (r_1 + r_2)^2$. Sehingga, dapat kita simpulkan bahwa panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran adalah:

$$d^2 = s^2 - (r_1 + r_2)^2$$

dengan $r_1 > r_2$, dan

d : panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran
s : jarak antara kedua pusat dua lingkaran
r_1 : jari-jari lingkaran pertama
r_2 : jari-jari lingkaran kedua

2 Panjang Garis Singgung Persekutuan Luar Dua Lingkaran

Perhatikan gambar di samping! Lingkaran *A* berpusat di *A* dengan jari-jari $AD = r_1$. Lingkaran *B* berpusat di *B* dengan jari-jari $BE = r_2$. *AB* adalah jarak kedua titik pusat lingkaran (*s*). *DE* adalah garis singgung persekutuan luar dua lingkaran, dimana $DE \perp AD$. Melalui titik *B*, dapat ditarik garis *BC* yang sejajar garis *DE* (*BC*//*DE*), sehingga $BE = CD = r_2$, dan $\angle ACB = 90^\circ$. Maka ΔACB adalah segitiga siku-siku, sehingga berlaku teorema Phythagoras,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$BC^2 = AB^2 – AC^2 = AB^2 – (AD – CD)^2 = s^2 – (r_1 – r_2)^2$

Karena $BC//DE$ dan $\angle ACB = \angle ADE = 90°$, maka $DE = BC$. Jadi, $DE^2 = s^2 – (r_1 – r_2)^2$. Maka panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran dirumuskan:

$$l^2 = s^2 – (r_1 – r_2)^2$$

dengan $r_1 > r_2$, dan

l : panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran

s : jarak antara kedua pusat dua lingkaran

r_1: jari-jari lingkaran pertama

r_2: jari-jari lingkaran kedua

Contoh

Panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran adalah 15 cm. Panjang jari-jari lingkaran yang besar adalah 6 cm. Jika jarak antara kedua titik pusat sama dengan 17 cm, hitunglah panjang jari-jari yang lingkaran kecil!

Penyelesaian:

$d = 15$ cm, $r_1 = 6$ cm, $s = 17$ cm

$d^2 = s^2 – (r_1 + r_2)^2$

$15^2 = 17^2 – (6 + r_2)^2$

$225 = 289 – (6 + r_2)^2$

$(6 + r_2)^2 = 289 – 225 = 64$

$6 + r_2 = \sqrt{64}$

$6 + r_2 = 8$

$r_2 = 8 – 6 = 2$ cm

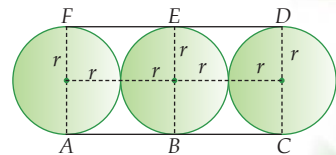
Jadi panjang jari-jari lingkaran kecil adalah 2 cm.

Latihan Soal

1. Panjang jari-jari dua lingkaran 4 cm dan 5 cm. Jarak kedua titik pusat lingkaran 15 cm. Hitunglah:
   a. panjang garis singgung lingkaran dalam,
   b. panjang garis singgung lingkaran luar!

2. Panjang jari-jari dua lingkaran 5 cm dan 12 cm. Jarak kedua titik pusat lingkaran 25 cm. Hitunglah:
   a. panjang garis singgung lingkaran dalam
   b. panjang garis singgung lingkaran luar
3. Panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran adalah 24 cm dan jarak kedua pusatnya 26 cm. Panjang salah satu jari-jari lingkaran 7 cm. Hitung panjang jari-jari yang lainnya!
4. Panjang jari-jari dua lingkaran adalah 29 cm dan 14 cm. Panjang garis singgung persekutuan luarnya 36 cm. Hitung jarak pusat kedua lingkarannya!
5. Panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran adalah 12 cm dan jarak kedua pusatnya 13 cm. Panjang salah satu jari-jari lingkaran 8 cm. Hitunglah panjang jari-jari yang lainnya!
6. Panjang jari-jari dua lingkaran adalah 10 cm dan 6 cm. Panjang garis singgung persekutuan dalamnya 30 cm. Hitunglah jarak pusat kedua lingkarannya!

Menghitung Panjang Sabuk Lilitan Minimal

Pada subbab ini, kita akan membahas panjang sabuk lilitan minimal yang membatasi dua lingkaran atau lebih. Dan pembahasan ini hanya dibatasi pada lingkaran yang mempunyai jari-jari sama besar.

Perhatikan gambar di atas! Tiga buah lingkaran yang berjari-jari sama, yaitu r, dililit secara horizontal dengan sebuah sabuk. Akibatnya, tiga lingkaran tersebut saling bersinggungan dengan garis singgung AB, BC, DE, dan EF. Panjang sabuk lilitan minimal yang menghubungkan dua lingkaran tersebut adalah sebagai berikut.

Panjang lilitan

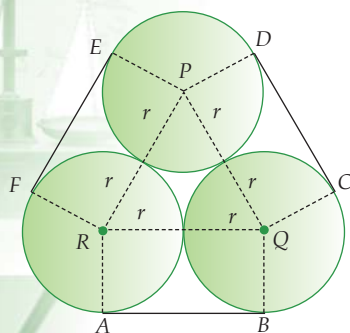
$= AB + BC + \text{busur } CD + DE + EF + \text{busur } FA$

$= 2r + 2r + (\frac{1}{2} \times \text{keliling lingkaran}) + 2r + 2r + (\frac{1}{2} \times \text{keliling lingkaran})$

$= 2r + 2r + (\frac{1}{2} \times 2\pi r) + 2r + 2r + (\frac{1}{2} \times 2\pi r) \qquad (d = 2r)$

$= d + d + (\pi r) + d + \text{d} + (\pi r)$

$= 4d + 2\pi r = 4d + \pi d$

Perhatikan, bahwa angka 4 yang muncul sama dengan banyaknya garis singgung yang terjadi akibat lilitan sabuk.

Lalu bagaimana cara menghitung panjang sabuk lilitan minimal jika tiga buah lingkaran dililit dengan posisi lilitan seperti gambar di samping!

Perhatikan gambar tersebut! Tiga buah lingkaran yang berjari-jari sama, yaitu r, dililit dengan sebuah sabuk. Akibatnya, tiga lingkaran tersebut saling bersinggungan, dengan garis singgung AB, CD, dan EF. Panjang sabuk lilitan minimal yang menghubungkan tiga lingkaran tersebut adalah sebagai berikut.

Perhatikan ΔPQR! Karena ΔPQR adalah segitiga sama sisi, maka $\angle PRQ = 60^\circ$.

Sehingga, $\angle FRA = 360^\circ - (\angle FRP + \angle PRQ + \angle ARQ)$
$= 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 90^\circ)$
$= 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$

Maka, busur $FA = \dfrac{120^\circ}{360^\circ} \times$ keliling lingkaran $= \dfrac{1}{3}$ keliling lingkaran.

Karena lingkaran yang diikat adalah lingkaran yang berjari-jari sama, maka busur FA = busur BC = busur ED.

Sehingga panjang lilitannya adalah:

= AB + busur BC + DC + busur DE + EF + busur FA

= AB + busur FA + DC + busur FA + EF + busur FA

= $AB + DC + EF$ + 3 busur FA

= $2r + 2r + 2r + (3 \times \frac{1}{3} \times$ keliling lingkaran)

karena diameter, $d = 2r$, maka,

= $d + d + d$ + (keliling lingkaran)

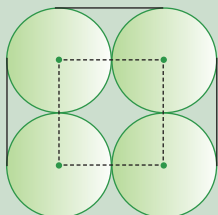
= $3d + 2\pi r$

= $3d + \pi d$

Perhatikan, angka 3 yang muncul sama dengan banyaknya garis singgung yang terjadi akibat lilitan sabuk.

Dengan demikian dapat disimpulkan, jika beberapa lingkaran yang berdiameter sama, yaitu d, dililit sebuah sabuk sedemikian rupa sehingga saling bersinggungan, dan n banyaknya garis singgung yang terjadi akibat lilitan sabuk, maka berlaku rumus.

> Panjang sabuk lilitan minimal = $nd + \pi d$

Contoh

Berdasarkan gambar di samping, jika jari-jari lingkaran 9 cm, hitunglah panjang lilitan minimalnya!

Penyelesaian:

Jari-jari = 9 cm

$d = 2r = 2 \times 9 = 18$ cm

Banyaknya garis singgung = n = 4 buah

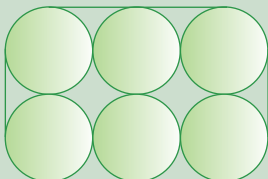
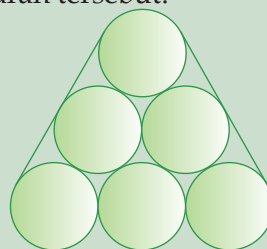
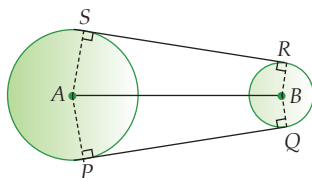
Panjang lilitan minimal $= nd + \pi d$

$= 4 \times 18 + 3{,}14 \times 18$

$= 72 + 56{,}52$

$= 128{,}52$ cm

Jadi, panjang lilitan minimalnya adalah 128,52 cm.

Latihan Soal

1. Enam buah lingkaran yang berdiameter sama yaitu 56 cm, dilit dengan sabuk seperti pada gambar di samping. Tentukanlah panjang lilitan minimal untuk mengikat keenam lingkaran tersebut!
2. Tentukanlah panjang lilitan minimal untuk mengikat lingkaran yang berdiameter sama yaitu 19 cm, seperti yang terlihat pada gambar di samping!
3. Misalkan terdapat 6 pipa yang berdiameter sama, yaitu 14 cm. Keenam pipa ini diikat dengan sebuah kawat. Bagaimana cara menyusunnya agar kawat yang digunakan adalah kawat terpendek? Tentukan berapakah panjang kawat terpendek tersebut!
4. Misalkan terdapat 10 buah pipa dengan diameter yang sama, yaitu 21 cm. Kesepuluh pipa tersebut diikat dengan sebuah kawat. Tentukan cara menyusun kawat tersebut agar kawat yang digunakan seminimal mungkin!

Otak-Atik Matematika

Dua lingkaran diikat oleh tali sedemikian rupa sehingga tampak seperti gambar di samping! Panjang jari-jari lingkaran *A* dan lingkaran *B* masing-masing 12 cm dan 6 cm. Jarak kedua pusat lingkaran adalah 30 cm. Jika besar $SAP = 155^{o}$, hitunglah panjang lilitan yang mengikat kedua lingkaran tersebut!

Rangkuman

1. Sifat garis singgung pada lingkaran adalah sebagai berikut.
   a. Melalui sebuah titik yang berada pada lingkaran hanya dapat dibuat satu garis singgung lingkaran.
   b. Garis singgung lingkaran tegak lurus dengan jari-jari lingkaran yang melalui titik singgungnya.
   c. Melalui sebuah titik yang berada di luar lingkaran hanya dapat dibuat dua garis singgung lingkaran melalui titik tersebut.

3. Garis singgung persekutuan adalah garis yang menyinggung dua lingkaran secara bersamaan. Ada dua jenis garis singgung persekutuan, yaitu garis singgung persekutuan dalam dan garis singgung persekutuan luar.

4. Panjang garis singgung lingkaran adalah

$$g^2 = p^2 - r^2$$

Panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran adalah

$$d^2 = s^2 - (r_1 + r_2)^2$$

Panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran adalah

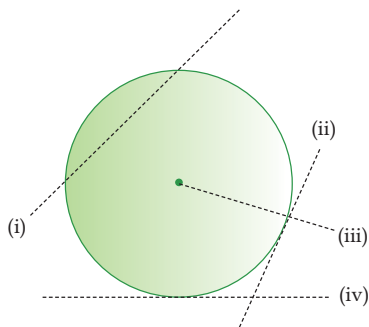
$$l^2 = s^2 - (r_1 - r_2)^2$$

dimana $r_1 > r_2$, dan

d : Panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran
g : Panjang garis singgung lingkaran
p : Jarak antara titik pusat lingkaran dengan titik yang berada di luar lingkaran
s : Jarak antara kedua pusat dua lingkaran
r_1 : Jari-jari lingkaran pertama
r_2 : Jari-jari lingkaran kedua

Uji Kemampuan

A. Pilihlah satu jawaban yang paling tepat, a, b, c, atau d! Tuliskan pada lembar jawabanmu!

1.

Dari gambar di samping, garis yang merupakan garis singgung lingkaran adalah ….

a. (i) dan (ii)
b. (ii) dan (iii)
c. (ii) dan (iv)
d. (iii) dan (iv)

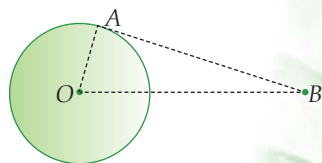
2. Jarak titik pusat lingkaran dengan sebuah titik yang berada di luar lingkaran adalah 20 cm. Jari-jari lingkaran adalah 15 cm. Panjang garis singgung yang melalui titik tersebut adalah ….

a. 25 cm
b. $5\sqrt{7}$ cm
c. $7\sqrt{5}$ cm
d. 35 cm

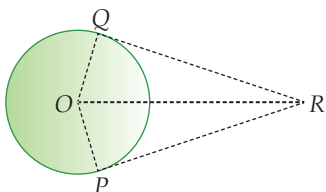
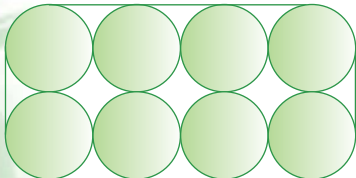
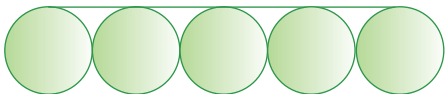
3. Jarak titik pusat lingkaran dengan sebuah titik yang berada di luar lingkaran adalah 39 cm. Panjang garis singgung yang melalui titik tersebut 36 cm. Jari-jari lingkaran itu adalah ….

a. 11 cm
b. 13 cm
c. 15 cm
d. 17 cm

4. Pada gambar di bawah ini, panjang jari-jari OA = 5 cm. Panjang OB = 13 cm. Panjang garis singgung AB adalah ….

a. 8
b. 10
c. 12
d. 14

5. Panjang garis singgung melalui sebuah titik di luar lingkaran adalah 48 cm. Jika jari-jari lingkaran 14 cm, maka jarak antara titik dengan pusat lingkaran adalah ….

a. 48 cm
b. 52 cm
c. 49 cm
d. 50 cm

6.

Pada gambar di samping, PR dan QR adalah garis singgung lingkaran dengan lingkaran yang berpusat di O. Panjang OQ = 12 cm, OR = 20 cm. Luas layang-layang $OQRP$ adalah ….

a. 178 cm^2
b. 192 cm^2
c. 202 cm^2
d. 234 cm^2

7. Dua buah lingkaran berjari-jari 11 cm dan 3 cm. Jarak kedua pusat lingkaran itu adalah 17 cm. Panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran tersebut adalah ....
   a. 18 cm
   b. 15 cm
   c. 8 cm
   d. 9 cm

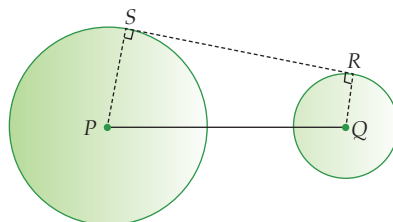
8. Dua buah lingkaran masing-masing berjari-jari 4 cm dan 3 cm. Jarak kedua pusatnya 24 cm. Panjang garis singgung persekutuan dalamnya adalah ....
   a. 21 cm
   b. 23 cm
   c. 25 cm
   d. 27 cm

9. Panjang jari-jari dua lingkaran masing-masing 12 cm dan 4 cm, sedangkan jarak kedua pusatnya 17 cm. Panjang singgung persekutuan luar kedua lingkaran tersebut adalah ....
   a. 9 cm
   b. 12 cm
   c. 15 cm
   d. 20 cm

10. Panjang jari-jari dua lingkaran adalah 12 cm dan 5 cm. Panjang garis singgung persekutuan luarnya 12 cm. Jarak kedua pusatnya adalah ....
   a. $\sqrt{193}$ cm
   b. $\sqrt{139}$ cm
   c. $\sqrt{225}$ cm
   d. $\sqrt{433}$ cm

11. Jarak kedua pusat lingkaran adalah 17 cm, sedangkan panjang garis singgung persekutuan dalamnya 15 cm. Panjang jari-jari salah satu lingkaran adalah 2 cm. Panjang jari-jari lingkaran yang lainnya adalah ....
   a. 5 cm
   b. 6 cm
   c. 7 cm
   d. 8 cm

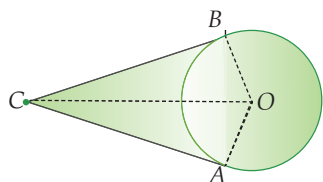
12. Pada gambar di samping, *RS* adalah garis singgung persekutuan luar. Jari-jari *PS* = 20 cm, *SR* = 30 cm, dan *PQ*= 34 cm. Panjang jari-jari *QR* adalah ....

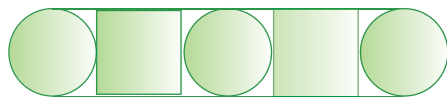
   a. 3 cm
   b. 4 cm
   c. 5 cm
   d. 8 cm

13.

   Gambar di samping adalah penampang 8 buah pipa berbentuk lingkaran yang masing-masing berjari-jari 14 cm. Panjang tali minimal yang diperlukan untuk mengikat semua pipa tersebut adalah ....
   a. 312 cm
   b. 286 cm
   c. 234 cm
   d. 198 cm

14. Lima buah pipa paralon yang masing-masing berdiameter 14 cm diikat dengan seutas tambang seperti gambar di samping. Panjang tambang minimal yang digunakan untuk mengikat kelima pipa paralon tersebut adalah .....

a. 96 cm
b. 126 cm
c. 156 cm
d. 206 cm

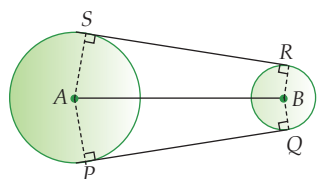
15.

Pada gambar di samping, panjang OA = 6 cm dan panjang OC = 10 cm. Luas layang-layang $AOBC$ adalah .... (BC = AC = Panjang garis singgung lingkaran)
a. 48 cm^2
b. 56 cm
c. 64 cm^2
d. 72 cm^2

16.

Pada gambar di samping, tiga buah lingkaran dan dua buah persegi panjang dililit sedemikian rupa sehingga tampak seperti gambar di atas. Jari-jari lingkaran masing-masing adalah 7 cm, sedangkan persegi panjang berukuran panjang 7 cm dan lebar 5 cm. Panjang lilitan minimalnya adalah ….
a. 118 cm
b. 128 cm
c. 138 cm
d. 148 cm

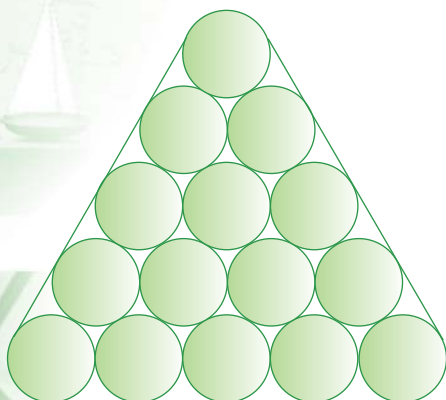
17. Panjang jari-jari dua lingkaran berturut-turut adalah 12 cm dan 8 cm. Jika jarak kedua pusatnya 25 cm, panjang garis singgung persekutuan dalamnya adalah ....
a. 13 cm
b. 14 cm
c. 15 cm
d. 16 cm

B. Selesaikan soal-soal berikut ini!

1. Panjang jari-jari dua lingkaran masing-masing 7 cm dan 27 cm. Jarak kedua pusatnya 52 cm. Hitunglah:
   a. Garis singgung persekutuan luar
   b. Garis singgung persekutuan dalam

2.

Dua lingkaran berpusat di A dan B, dengan AS = 14 cm dan BR = 5 cm. Panjang garis persekutuan luarnya SR = PQ = 40 cm. Hitunglah luas daerah $PQRS$!

3. Lingkaran P dan Q masing-masing mempunyai jari-jari 5 cm dan 3 cm. Jarak antara kedua pusat lingkaran adalah 17 cm.
   a. Gambarlah garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran tersebut!
   b. Gambarlah garis singgung persekutuan luar dua lingkaran tersebut!

4.

15 buah pipa yang berjari-jari sama, yaitu 23 cm, diikat dengan tambang sedemikian rupa sehingga tampak seperti gambar di samping. Hitunglah panjang tambang minimal yang diperlukan untuk mengikat 15 pipa tersebut!

5. Beberapa buah paralon yang berjari-jari sama, yaitu 21 cm, diikat berjejer secara horizontal oleh kawat. Panjang kawat yang diperlukan untuk mengikat semua paralon tersebut adalah 5,1 m. Hitunglah banyaknya paralon yang diikat oleh kawat tersebut!

KUNCI JAWABAN BAB 7

A. Pilihan Ganda

1. c
3. c
5. d
7. b
9. c
11. b
13. a
15. a
17. c

B. **Uraian**

1. a. 48 cm
   b. 39,34 cm
5. 9 buah paralon

Bab

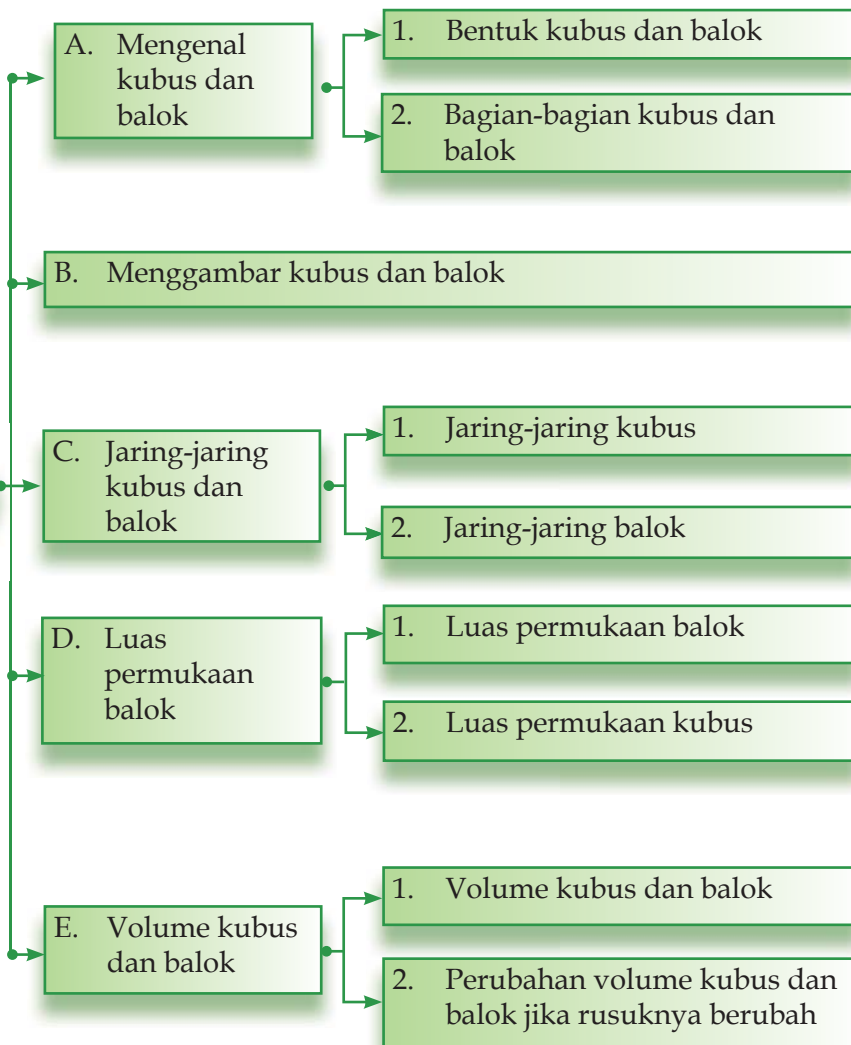
Kubus dan Balok

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini siswa diharapkan mampu:

- Mengenal dan menyebutkan bidang, rusuk, diagonal bidang, diagonal ruang, bidang diagonal kubus dan balok;
- Menggambar kubus dan balok;
- Menggambar jaring-jaring kubus dan balok, serta menghitung luas permukaannya;
- Menemukan rumus dan menghitung volume kubus dan balok;
- Merancang kubus dan balok untuk volume tertentu;
- Menghitung besar perubahan volume bangun kubus dan balok jika ukuran rusuknya berubah;
- Menyelesaikan soal yang melibatkan kubus dan balok.

Nina membeli sebuah aksesoris komputer sebagai hadiah ulang tahun temannya. Dus dari aksesoris tersebut berbentuk balok dengan ukuran 30 cm × 18 cm × 31 cm. Nina ingin membungkusnya dengan kertas kado berukuran 15 cm × 40 cm. Tentukan berapa banyak kertas kado yang dibutuhkan agar semua permukaan dus komputer tersebut tertutupi?

Peta konsep

Kubus dan balok
A. Mengenal kubus dan balok
1. Bentuk kubus dan balok
2. Bagian-bagian kubus dan balok
B. Menggambar kubus dan balok
C. Jaring-jaring kubus dan balok
1. Jaring-jaring kubus
2. Jaring-jaring balok
D. Luas permukaan balok
1. Luas permukaan balok
2. Luas permukaan kubus
E. Volume kubus dan balok
1. Volume kubus dan balok
2. Perubahan volume kubus dan balok jika rusuknya berubah

A Mengenal ubus dan Balok

1 Bentuk Kubus dan Balok

Kubus dan balok termasuk salah satu bentuk bangun ruang, yaitu benda-benda yang mempunyai panjang, lebar, dan kedalaman.

Kubus dan balok juga merupakan bangun ruang yang paling banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, misalnya dus mi instant, lemari pakaian, kotak pasta gigi, tempat alat tulis, lemari es, dan lain sebagainya. Dapatkah kamu menyebutkan benda-benda lainnya yang berbentuk kubus dan balok?

Tokoh

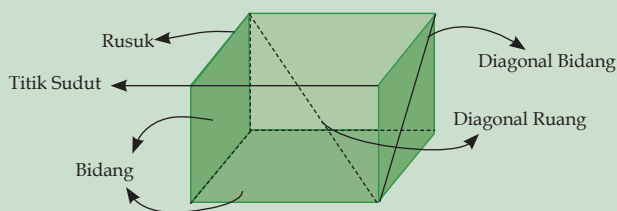
Plato adalah seorang filosof Yunani yang mencoba menerangkan alam semesta dengan mengkaji lima buah bangun ruang, yang selanjutnya dikenal dengan nama 'bangun-bangun ruang Platonik'.

(*Sumber: Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*)

2 Bagian-bagian Kubus dan Balok

Bagian-bagian dari kubus dan balok adalah bidang, rusuk, titik sudut, diagonal bidang, diagonal ruang, dan bidang diagonal. Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh

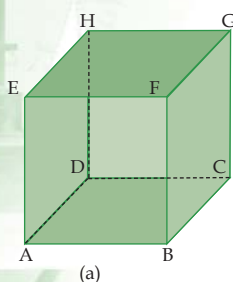
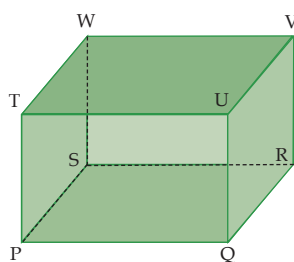
Perhatikanlah bagian-bagian dari balok berikut ini!

Math Info

Bangun-bangun ruang Platonik terdiri dari tetrahedron beraturan (bidang empat), kubus, oktahedron (bidang delapan), dodekahedron (bidang duabelas), dan ikosahedron (bidang duapuluh).

Sumber: Encarta

a. Bidang

Bidang adalah daerah yang membatasi bagian luar dengan bagian dalam dari suatu bangun ruang. Perhatikan gambar di bawah ini. Ada berapa bidang yang dapat kalian temukan pada kubus maupun balok tersebut?

Kubus pada gambar (a), diberi nama kubus *ABCD.EFGH*. Bidang-bidang pada kubus *ABCD.EFGH* adalah bidang *ABCD* (alas), bidang *EFGH* (atas/tutup), bidang *ADHE* (kiri), bidang

(a)

(b)

BCGF (kanan), bidang *ABFE* (depan), dan bidang *DCGH* (belakang).

Jika kamu perhatikan, bidang *ADHE* dan bidang *BCGF* terlihat seperti bentuk jajargenjang. Akan tetapi, kedua bidang ini sebenarnya berbentuk persegi seperti bidang-bidang lainnya pada kubus. Ingat, kubus adalah bangun ruang yang sisi-sisinya (bidangnya) beraturan dan sama. Jadi dapat disimpulkan bahwa kubus mempunyai 6 bidang yang semuanya berbentuk persegi.

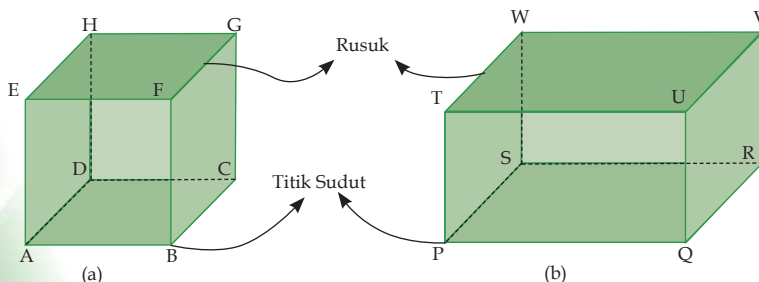
Balok pada gambar (b), diberi nama balok *PQRS.TUVW*. Coba kalian sebutkan semua bidang yang ada pada balok *PQRS.TUVW* ini? Perhatikan bidang *PQUT* dan bidang *QRVU*. Apakah bentuk dari kedua bidang ini sama?

Berbeda dengan kubus, bidang-bidang balok mempunyai ukuran yang berbeda, tergantung letaknya. Misalnya, bidang *PQUT* (depan) mempunyai ukuran panjang × tinggi, sedangkan bidang *QRVU* (kanan) mempunyai ukuran lebar × tinggi. Jadi dapat disimpulkan bahwa balok mempunyai 6 bidang berbentuk persegi panjang. Dapatkah kamu menyebutkan pasangan bidang balok yang mempunyai ukuran yang sama? Berapa pasang bidang yang dapat kamu temukan?

b. Rusuk dan Titik Sudut

Rusuk adalah perpotongan dua buah bidang yang berupa garis. Perhatikan gambar di bawah ini, ada berapa banyak rusuk pada kubus maupun balok tersebut? Rusuk pada kubus sama panjang, sedangkan rusuk pada balok mempunyai 3 ukuran, yaitu panjang, lebar, dan tinggi.

Pada kubus maupun balok, terdapat rusuk-rusuk yang saling berpotongan. Pada kubus gambar (a), *AB* berpotongan dengan *BC*, *BF*, *AD*, dan *AE*. Selain terdapat rusuk yang saling berpotongan, terdapat juga rusuk yang sejajar. Misalnya, pada balok gambar (b), *PQ* sejajar dengan *SR*, *TU*, dan *WV*. Dapatkah kalian menyebutkan

(a) (b)

rusuk-rusuk yang saling berpotongan maupun yang sejajar lainnya pada kubus dan balok tersebut?

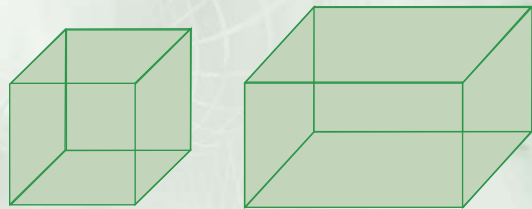
Titik sudut merupakan perpotongan tiga buah rusuk. Misalkan titik A, titik A merupakan perpotongan dari rusuk AB, AD, dan AE pada gambar (a). Coba kalian sebutkan semua titik sudut kubus dan balok pada gambar di atas!

Seandainya kita ingin membuat kerangka suatu bangun ruang, kita harus memperhatikan rusuk-rusuk yang terdapat pada bangun ruang tersebut. Kita juga perlu menyediakan bahan-bahan untuk membuat kerangka seperti kawat dengan lem (*super glue*), lidi dengan lem (*super glue*), sedotan dengan benang, dan lain sebagainya. Tahukah kamu, berapakah panjang kawat yang diperlukan untuk membuat kerangka kubus yang panjang rusuknya 4 cm? Berapakah panjang kawat yang dibutuhkan untuk membuat balok dengan ukuran panjang 8 cm, lebar 5 cm, dan tinggi 4 cm? Untuk mengetahuinya, lakukanlah kegiatan di bawah ini!

Tugas

Untuk membuat kerangka kubus, siapkan lidi dengan ukuran 4 cm sebanyak 12 buah. Sedangkan untuk membuat kerangka balok siapkan lidi dengan ukuran 8 cm sebanyak 4 buah, 5 cm sebanyak 4 buah, dan 4 cm sebanyak 4 buah. Siapkan pula lem (*super glue*) untuk merekatkan lidi-lidi tersebut.

Kemudian bentuklah lidi tersebut dengan bantuan lem (*super glue*) sehingga terbentuk menjadi kerangka kubus dan balok seperti gambar di samping!

Berapakah panjang lidi yang kamu habiskan untuk membuat kerangka kubus dan balok tersebut? Diskusikan dengan teman sebangkumu!

Setelah kamu melakukan kegiatan di atas, bandingkan hasil diskusimu dengan uraian berikut ini.

Jika panjang rusuk sebuah kubus 4 cm, maka untuk membuat kerangka kubus kita memerlukan lidi dengan ukuran 4 cm sebanyak 12 buah. Maka panjang seluruh lidi yang digunakan adalah 12×4 cm = 48 cm. Jadi, dapat kita simpulkan untuk mencari jumlah panjang rusuk sebuah kubus yang berukuran s, berlaku rumus:

$$\text{Jumlah panjang rusuk kubus} = 12s$$

Math Info

Para ahli kimia memperkirakan kemungkinan bentuk molekul dengan mempelajari dan memahami tiga bentuk bangun ruang, yaitu kubus, piramida, dan bola.

Sumber: Encarta

Sedangkan untuk membuat kerangka balok dengan ukuran panjang 8 cm, lebar 5 cm, dan tinggi 4 cm, kita memerlukan lidi 8 cm sebanyak 4 buah, lidi 5 cm sebanyak 4 buah, dan lidi 4 cm sebanyak 4 buah.

Maka panjang seluruh lidi adalah

$= 4 \times 8 \text{ cm} + 4 \times 5 \text{ cm} + 4 \times 4 \text{ cm}$

$= 4 (8 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 4 \text{ cm})$ (sifat distributif)

$= 4 (17 \text{ cm})$

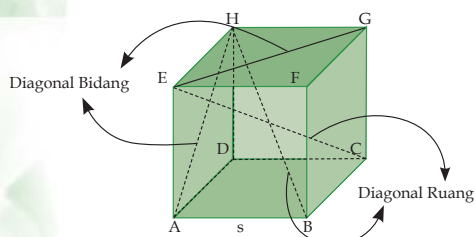
$= 68 \text{ cm}$

Jadi, jumlah panjang rusuk balok yang mempunyai ukuran panjang p, lebar l, dan tinggi t, berlaku rumus:

$$\text{Jumlah panjang rusuk balok} = 4p + 4l + 4t = 4(p + l + t)$$

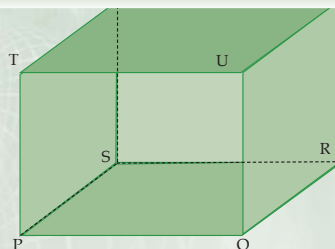
c. Diagonal Bidang dan Diagonal Ruang

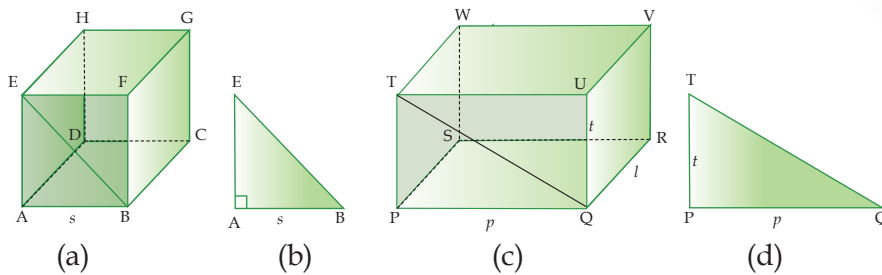
1. *Pengertian Diagonal Bidang dan Diagonal Ruang*

Perhatikan gambar berikut! Jika titik E dan titik G dihubungkan, maka akan diperoleh garis EG. Begitupun jika titik A dan titik H dihubungkan, kita akan memperoleh garis AH. Garis seperti EG dan AH inilah yang dinamakan diagonal bidang, yaitu garis yang menghubungkan dua buah titik sudut yang saling berhadapan dalam satu bidang.

Perhatikan kembali gambar di atas! Jika titik E dan titik C dihubungkan kita akan memperoleh garis EC, begitu juga jika titik H dan titik B kita hubungkan akan diperoleh garis HB. Garis seperti EC dan HB inilah yang dinamakan dengan diagonal ruang. Jadi, diagonal ruang adalah garis yang menghubungkan dua buah titik sudut yang saling berhadapan tak sebidang.

Tugas

Jiplaklah balok *PQRS.TUVW* di samping ini!

Buatlah semua diagonal bidang dan diagonal ruang dari balok *PQRS.TUVW*. Ada berapa banyak diagonal bidang dan diagonal ruang yang dapat kamu temukan? Sebutkan!

2. *Panjang Diagonal Bidang*

Selanjutnya perhatikan gambar berikut!

(a) (b) (c) (d)

Pada gambar (a), garis EB merupakan diagonal bidang dari kubus $ABCD.EFGH$. Garis EB terletak pada bidang $ABFE$ dan membagi bidang tersebut menjadi dua buah segitiga siku-siku yaitu segitiga ABE dengan siku-siku di A, dan segitiga BFE dengan siku-siku di F. Perhatikan segitiga ABE pada gambar (b) dengan EB sebagai diagonal bidang. Berdasarkan teorema Pythagoras, maka:

$$EB^2 = AE^2 + AB^2$$
$$= s^2 + s^2$$
$$= 2s^2, \text{ sehingga didapat}$$
$$EB = \sqrt{2s^2} = s\sqrt{2}$$

Karena semua bidang dalam kubus berbentuk persegi, maka panjang diagonal bidang dari setiap bidang pada kubus nilainya sama. Sehingga dapat kita ambil kesimpulan, jika s merupakan panjang rusuk sebuah kubus, maka berlaku rumus:

Panjang diagonal bidang kubus = $s\sqrt{2}$

Sekarang perhatikan gambar (c). Pada bidang $PQUT$, terdapat diagonal bidang TQ, dan TQ membagi bidang $PQUT$ menjadi dua buah segitiga siku-siku yaitu segitiga PTQ dengan siku-siku di P dan segitiga QUT dengan siku-siku di U. Perhatikan segitiga pada gambar (d) dengan TQ sebagai diagonal bidang $PQUT$, $PQ = p$, dan $TP = t$. Berdasarkan teorema Pythagoras, maka:

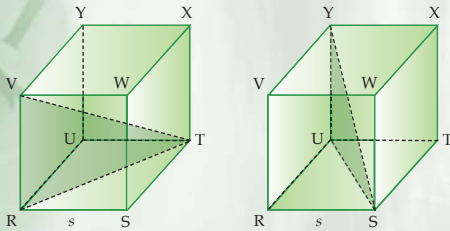
$$TQ^2 = PQ^2 + TP^2$$
$$= p^2 + t^2$$
$$TQ = \sqrt{p^2 + t^2}$$

Amati kembali gambar (c). Tentukan panjang diagonal bidang yang lainnya!

3. *Panjang Diagonal Ruang*

Untuk menentukan panjang diagonal ruang kubus, lakukanlah kegiatan berikut ini!

Tugas

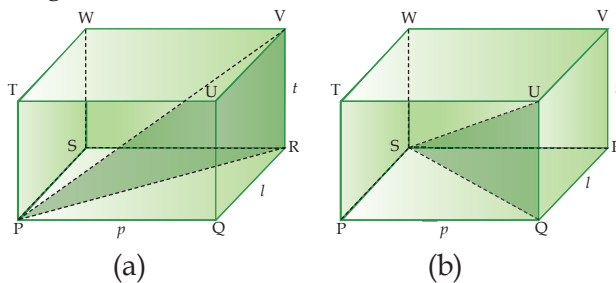
Perhatikan kubus *RSTU.VWXY* di bawah ini!

Dengan menggunakan teorema Pythagoras, tentukanlah panjang diagonal ruang *TV*, *SY*, *RX*, dan *UW*! Diskusikan hasilnya dengan teman sebangkumu, kemudian bandingkanlah hasilnya dengan kesimpulan di bawah ini!

Jika s = panjang rusuk sebuah kubus, maka berlaku rumus:

Panjang diagonal ruang kubus = $s\sqrt{3}$

Sedangkan untuk menentukan panjang diagonal ruang balok, perhatikan gambar berikut ini!

(a)

(b)

Pada gambar di atas, *PV* dan *SU* merupakan diagonal ruang balok *PQRS.TUVW*. Jika kamu perhatikan, apakah diagonal *PV* lebih panjang jika dibandingkan dengan diagonal *SU*? Perhatikan penjelasan berikut ini.

Karena segitiga *PRV* merupakan segitiga siku-siku dengan siku-siku di *R*, maka berlaku teorema Pythagoras, sehingga diperoleh $PV^2 = PR^2 + VR^2$, dimana *PR* sebagai diagonal bidang *PQRS*. Berdasarkan uraian di atas, kita peroleh hubungan:

$PV^2 = (PQ^2 + QR^2 + VR^2)$

$\quad = p^2 + l^2 + t^2$

$PV = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$ .... (1)

Karena segitiga *QSU* merupakan segitiga siku-siku dengan siku-siku di *Q*, maka berlaku teorema Pythagoras, sehingga

diperoleh $SU^2 = QS^2 + QU^2$, dimana QS sebagai diagonal bidang $PQRS$. Berdasarkan uraian di atas, kita peroleh hubungan:

$$SU^2 = (PQ^2 + PS^2 + QU^2)$$

$$= p^2 + l^2 + t^2$$

$$SU = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2} \text{ .... (2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh bahwa $PV = SU$. Sehingga jika sebuah balok mempunyai ukuran panjang p, lebar l, dan tinggi t, maka berlaku rumus:

Panjang diagonal ruang balok = $\sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$

Contoh

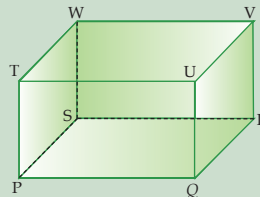
1. Sebuah kubus mempunyai panjang rusuk 16 cm. Hitunglah panjang diagonal bidang dan panjang diagonal ruang kubus tersebut!

   Penyelesaian:

   rusuk = s = 16 cm

   Panjang diagonal bidang = $s\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ cm

   Panjang diagonal ruang = $s\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ cm

2. Perhatikan balok $PQRS.TUVW$ di samping! Diketahui PQ = 23 cm, QR = 13 cm, dan VR = 7 cm. Hitunglah panjang diagonal bidang $UQRV$ dan panjang diagonal ruang balok tersebut!

   Penyelesaian:

   $PQ = p = 23$ cm, $QR = l = 13$ cm, dan $VR = t = 7$ cm

   Panjang diagonal bidang $UQRV = \sqrt{QR^2 + VR^2}$

   $= \sqrt{l^2 + t^2}$

   $= \sqrt{13^2 + 7^2}$

   $= \sqrt{169 + 49}$

   $= \sqrt{218}$ cm

Panjang diagonal ruang $= \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$

$= \sqrt{23^2 + 13^2 + 7^2}$

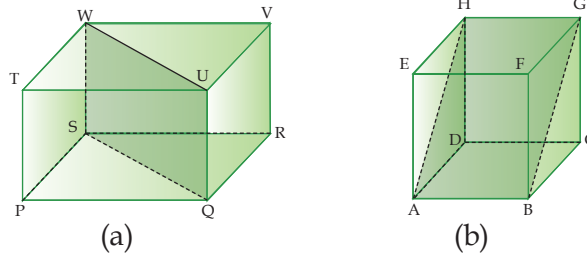
$= \sqrt{529 + 169 + 497}$

$= \sqrt{747} = 3\sqrt{83}$ cm

d. Bidang Diagonal

Bidang diagonal adalah daerah yang dibatasi oleh dua buah diagonal bidang dan dua buah rusuk yang saling berhadapan, dan membagi bangun ruang menjadi dua bagian. Perhatikan gambar berikut ini!

(a)

(b)

Balok *PQRS.TUVW* terbagi menjadi dua bagian oleh diagonal bidang *WU*, diagonal bidang *SQ*, rusuk *QU*, dan rusuk *SW* yang membentuk satu bidang, yaitu bidang *SQUW* (Gambar (a)). Begitu juga bidang *ABGH* membagi kubus *ABCD.EFGH* menjadi dua bagian (Gambar (b)). Coba kamu sebutkan, diagonal bidang dan rusuk mana saja yang membatasi bidang *ABGH*!

Bidang seperti *SQUW* dan *ABGH* ini dinamakan bidang diagonal. Dapatkah kamu menyebutkan bidang diagonal yang lainnya?

Bidang diagonal pada balok sama dengan bidang diagonal pada kubus, hanya bentuknya saja yang berbeda. Perhatikan kembali gambar di atas. Ternyata bidang diagonal *SQUW* berbentuk persegi panjang, karena $SQ // WU$, $QU // SW$, $SQ \perp QU$, dan $WU \perp SW$. Sedangkan bentuk diagonal *ABGH* adalah persegi, coba kalian jelaskan mengapa bentuk diagonal *ABGH* merupakan sebuah persegi!

Contoh

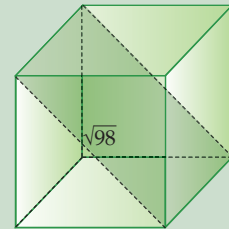
Jika panjang diagonal bidang sebuah kubus adalah $\sqrt{98}$ cm. Hitunglah luas bidang diagonal kubus tersebut!

Penyelesaian:

Panjang diagonal bidang = $s\sqrt{2}$

$$\sqrt{98} = s\sqrt{2}$$

$$s = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{98}{2}}$$

$$= \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$$

Luas bidang diagonal = rusuk × panjang diagonal bidang

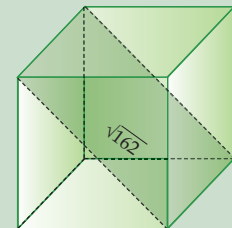
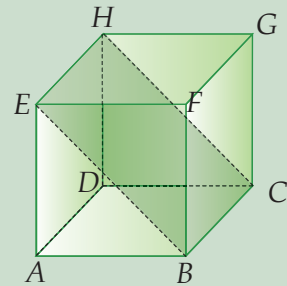
$= s \times s\sqrt{2}$

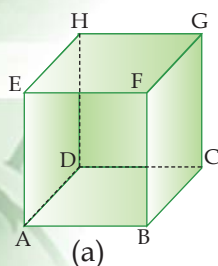
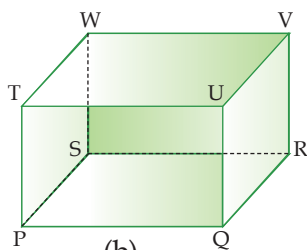
$= s^2\sqrt{2}$

$= 7^2\sqrt{2} = 49\sqrt{2}$ cm².

Latihan Soal

1. Pada kubus *ABCD.EFGH*, *BCHE* merupakan diagonal bidang kubus.
   a. Sebutkan rusuk-rusuk yang sejajar dan rusuk-rusuk saling berpotongan!
   b. Sebutkan kelompok bidang yang kongruen!
   c. Sebutkan diagonal bidang yang lainnya!
   d. Sebutkan semua diagonal ruang kubus tersebut!

2. Panjang diagonal ruang suatu kubus adalah $\sqrt{243}$ cm. Hitunglah panjang rusuk kubus tersebut!
3. Pada balok *ABCD.EFGH*, *BCHE* merupakan bidang diagonal balok tersebut.
   a. Sebutkan bidang diagonal yang lainnya!
   b. Berbentuk apakah bidang diagonal tersebut?
4. Panjang diagonal sebuah balok adalah $\sqrt{421}$ cm. Jika panjang balok 14 cm dan lebar balok 12 cm, hitunglah tinggi balok tersebut!
5. Disediakan kawat yang panjangnya 2 m. Jika panjang sebuah model kerangka balok adalah 5 cm, lebarnya 15 cm, dan tingginya 17 cm, berapakah sisa kawat yang tidak terpakai?
6. Sebuah model kerangka kubus dibuat dengan menghabiskan kawat sepanjang 90 cm. Berapakah panjang rusuk kubus tersebut?
7. Pada balok *PQRS.TUVW*, *PQVW* adalah bidang diagonal balok tersebut. Jika *PQ* = 15 cm, *QR* = 9 cm, dan *RW* = 7 cm, berapakah luas *PQVW*?
8. Jika panjang diagonal bidang sebuah kubus adalah $\sqrt{162}$ cm. Hitunglah luas bidang diagonal kubus tersebut!

B Menggambar ubus dan Balok

Untuk mempermudah dalam menggambar sebuah kubus dan balok, sebaiknya kalian menggunakan kertas berpetak.

(a)

(b)

Ada beberapa hal yang harus diperhatikan dalam menggambar kubus dan balok seperti gambar di samping, yaitu:

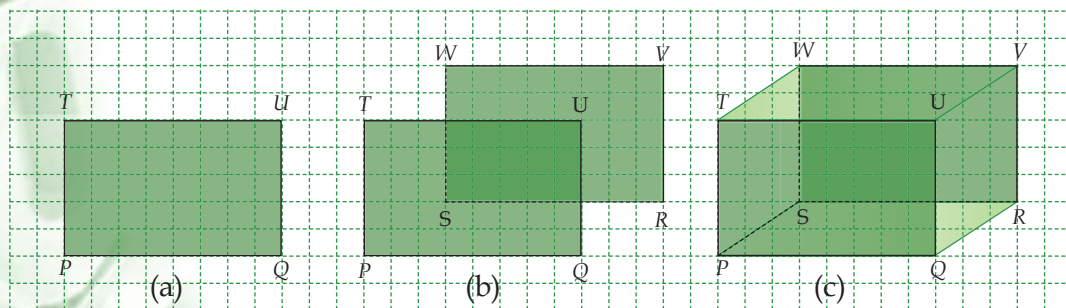
a. Untuk menggambar kubus dan balok, bidang depan dan bidang belakang harus digambar kongruen (bentuk dan ukurannya sama).

b. Bidang depan dan belakang pada kubus berbentuk persegi, sedangkan pada balok berbentuk persegi panjang.

c. Garis yang tidak terlihat oleh pandangan, digambar dengan garis putus-putus.

Sebagai contoh, kita akan menggambar balok *PQRS.TUVW* seperti pada gambar (b). Berdasarkan ketiga hal di atas, maka untuk menggambar balok tersebut, ikutilah langkah-langkah berikut:

1. Gambarlah bidang depan terlebih dahulu, yaitu bidang *PQUT* yang berbentuk persegi panjang (lihat gambar(a)).
2. Kemudian gambarlah bidang belakang, yaitu bidang *SRVW* yang kongruen dengan bidang depan (lihat gambar(b)), dengan garis *SR* dan *SW* digambar putus-putus (garis yang tidak terlihat oleh pandangan).
3. Gambarlah garis yang menghubungkan titik-titik sudut antara bidang depan *PQUT* dengan bidang belakang *SRVW*. Garis *SP* digambar putus-putus (lihat gambar(c)).

(a) (b) (c)

Tugas

Gambarlah kubus *ABCD.EFGH* gambar (a) pada kertas berpetak dengan panjang rusuk 5 satuan. Ikuti langkah-langkah seperti menggambar balok *PQRS.TUVW* yang telah kita bahas!

Latihan Soal

Kerjakan soal-soal berikut pada kertas berpetak!

1. Gambarlah sebuah kubus dengan panjang rusuk 7 satuan. Berilah warna pada bidang alasnya!
2. Gambarlah sebuah kubus dengan panjang rusuk 6 satuan. Berilah nama pada kubus tersebut dan sebutkanlah rusuk-rusuk yang saling berpotongan serta rusuk-rusuk yang sejajar!
3. Gambarlah sebuah balok dengan ukuran panjang 9 satuan, lebar 7 satuan, dan tinggi 5 satuan. Berilah warna pada bidang alasnya!
4. Gambarlah sebuah balok dengan ukuran panjang 5 satuan, lebar 3 satuan, dan tinggi 8 satuan. Berilah nama pada balok tersebut dan sebutkanlah rusuk-rusuk yang saling berpotongan serta rusuk-rusuk yang sejajar!
5. Gambarlah sebuah balok dengan perbandingan antara panjang, lebar, dan tingginya sebesar 5 : 4 : 2!

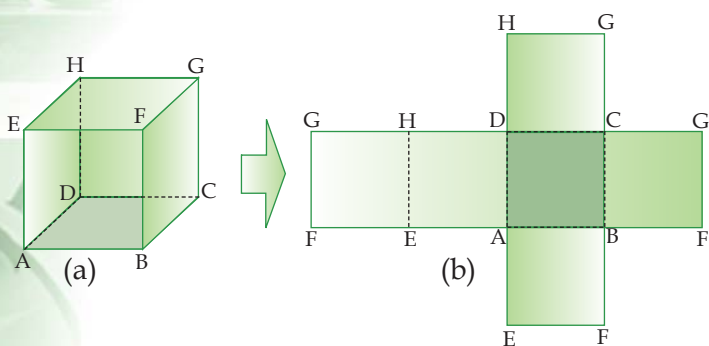
C aring jaring ubus dan Balok

Jika sebuah bangun ruang diiris pada beberapa rusuknya, kemudian kita buka dan dibentangkan sedemian rupa sehingga menjadi sebuah bangun datar, maka bangun datar tersebut akan membentuk jaring-jaring bangun ruang.

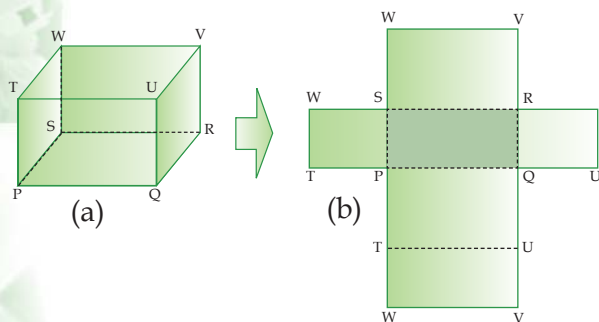
1 Jaring-Jaring Kubus

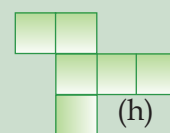
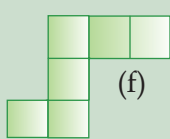
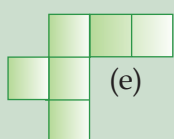
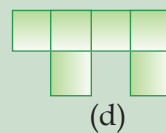
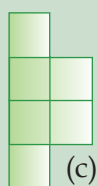
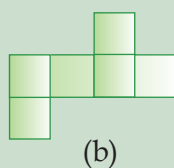
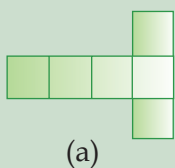
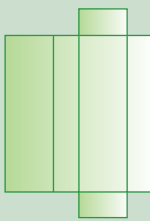
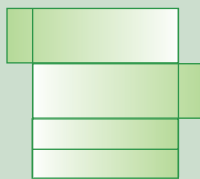
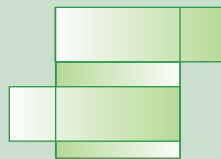
Perhatikan gambar berikut! Jika kubus *ABCD.EFGH* pada gambar (a) kita iris sepanjang rusuk *AE*, *EF*, *FB*, *CG*, *GH*, dan *HD*, kemudian kita buka dan bentangkan, maka akan membentuk bangun datar seperti terlihat pada gambar (b). Banun datar tersebut merupakan jaring-jaring kubus.

Dapat kamu lihat, bahwa jaring-jaring kubus terdiri dari enam buah persegi yang kongruen (sama bentuk dan ukurannya).

Jika kita lipat kembali pada garis yang menjadi perbatasan dua buah persegi, maka akan terbentuk kubus *ABCD.EFGH*. Dengan catatan, tidak ada persegi yang bertumpuk.

Jika kita iris pada rusuk yang berbeda maka akan menghasilkan jaring-jaring kubus yang berbeda pula. Coba kamu iris kembali kubus pada gambar (a) dengan irisan yang berbeda-beda. Berapa banyak jaring-jaring kubus yang dapat kamu peroleh?

2 Jaring-jaring Balok

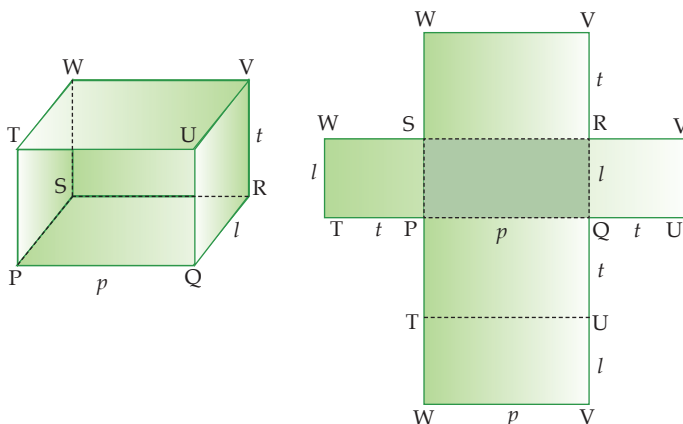
Jika balok *PQRS.TUVW* pada gambar (a) kita iris sepanjang rusuk *RV*, *VU*, *UQ*, *SW*, *WT*, dan *TP*, kemudian kita buka dan bentangkan, maka akan membentuk jaring-jaring balok seperti terlihat pada gambar (b). Apabila rusuk yang kita iris berbeda, maka akan menghasilkan jaring-jaring balok yang berbeda pula. Dapatkah kamu membentuk jaring-jaring balok yang lainnya?

Latihan Soal

1. Dari rangkaian persegi di bawah ini, manakah yang merupakan jaring-jaring kubus?

2. Dari rangkaian persegi panjang berikut ini, manakah yang merupakan jaring-jaring balok?

3. Santi ingin membuat sebuah kotak. Ia menyediakan dua potong karton berukuran 12 cm × 8 cm dan dua potong karton lagi berukuran 8 cm × 9 cm. Berapa potong karton lagi yang Santi butuhkan? Berapakah ukuran karton yang dibutuhkan Santi?
4. Disediakan dua potong karton yang berbentuk persegi panjang dengan ukuran 17 cm × 13 cm, dan dua potong lagi berbentuk persegi panjang dengan ukuran 17 cm × 9 cm. Berapa potong karton lagi yang diperlukan untuk membuat sebuah kotak? Berapakah ukuran kotak tersebut?

D Luas Permukaan ubus dan Balok

Luas permukaan suatu bangun ruang dapat dicari dengan cara menjumlahkan luas dari bidang-bidang yang menyusun bangun ruang tersebut. Oleh karena itu, kita harus memperhatikan banyaknya bidang dan bentuk masing-masing bidang pada suatu bangun ruang.

1 Luas Permukaan Balok

Perhatikan gambar berikut ini!

Jika kita mempunyai balok seperti gambar di atas, maka:

Luas permukaan = luas bidang $SWVR$ + luas bidang $SRQP$ + luas bidang $PQUT$ + luas bidang $TUVW$ + luas bidang $TPSW$ + luas bidang $QUVR$

$= (p \times t) + (p \times l) + (p \times t) + (p \times l) + (l \times t) + (l \times t)$

$= 2\,(p \times l) + 2\,(p \times t) + 2\,(l \times t)$

$= 2\,[(p \times l) + (p \times t) + (l \times t)]$ (sifat distributif)

Sehingga dapat disimpulkan bahwa jika sebuah balok mempunyai ukuran rusuk panjang p, lebar l, dan tinggi t, maka berlaku rumus:

$$\text{Luas permukaan} = 2\,[(p \times l) + (p \times t) + (l \times t)]$$

Contoh

Sebuah balok berukuran panjang 23 cm, lebar 19 cm, dan tinggi 8 cm. Hitunglah luas permukaan balok tersebut!

Penyelesaian:

$p = 23$ cm, $l = 19$ cm, $t = 8$ cm

Luas permukaan balok

$= 2\,[(p \times l) + (p \times t) + (l \times t)]$

$= 2\,[(23 \times 19) + (23 \times 8) + (19 \times 8)]$ cm²

$= 2\,[437 + 184 + 152]$ cm² $= 2\,[773]$ cm² $= 1.546$ cm²

2 Luas Permukaan Kubus

Seperti yang telah kita pelajari sebelumnya, jaring-jaring kubus terdiri atas enam buah persegi. Perhatikan contoh berikut.

Contoh

Jika panjang rusuk sebuah kubus adalah 23 cm. Hitunglah luas permukaan kubus tersebut!

Penyelesaian:

$s = 23$ cm

Luas permukaan kubus $= 6s^2$

$= 6 \times 23^2$

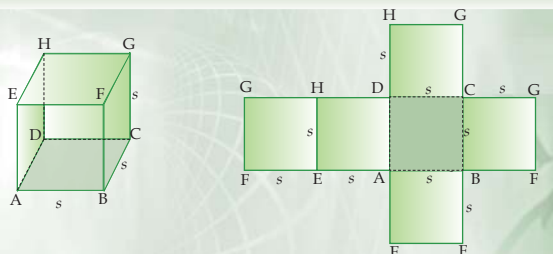
$= 6 \times 529$ cm²

$= 3.174$ cm²

Untuk menentukan rumus luas permukaan kubus pada contoh tersebut, lakukanlah kegiatan di bawah ini!

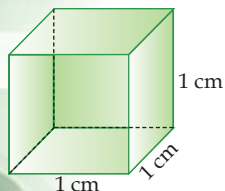
Tugas

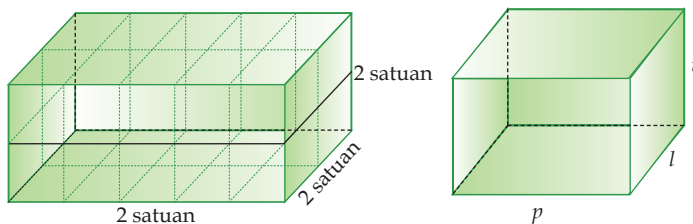
Perhatikan gambar di bawah ini!

Tentukanlah luas permukaan kubus di samping dengan cara menjumlahkan luas semua bidang pada kubus! Diskusikanlah dengan temanmu kemudian buatlah sebuah kesimpulan!

Latihan Soal

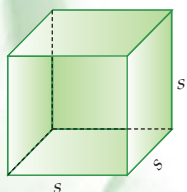
1. Hitunglah luas permukaan kubus yang panjang rusuknya 9 cm!
2. Jika luas permukaan kubus 726 cm^2, hitunglah panjang rusuk kubus tersebut!
3. Hitunglah luas pemukaan balok yang berukuran panjang 25 cm, lebar 16 cm, dan tinggi 7 cm!
4. Jika perbandingan panjang, lebar, dan tinggi sebuah balok adalah 3 : 2 : 1 dan luas permukaan balok tersebut 325 cm^2, tentukan ukuran panjang, lebar dan tinggi dari balok tersebut!
5. Keliling alas sebuah kubus adalah 32 cm, tentukan luas permukaan kubus yang dimaksud!
6. Sebuah balok berukuran panjang 15 cm dan lebar 10 cm. Jika luas permukaan balok 1.100 cm^2, tentukanlah tinggi balok tersebut!
7. Andi akan membungkus sebuah kado yang berbentuk balok dengan ukuran 25 cm × 18 cm × 5 cm. Berapakah luas kertas kado yang harus disediakan Andi agar kado tersebut tepat tertutup oleh kertas kado?
8. Diketahui luas permukaan kubus 864 cm^2, jika perbandingan antara panjang, lebar, dan tinggi suatu balok dengan rusuk kubus sama dengan 4 : 3 : 2, tentukan luas permukaan balok yang dimaksud!

E Volume ubus dan Balok

1 Volume Kubus dan Balok

Volume adalah bilangan yang menyatakan ukuran suatu bangun ruang. Untuk menghitung volume balok, kita harus membandingkannya dengan satuan pokok volume bangun ruang. Contohnya volume kubus yang memiliki panjang rusuk 1 satuan, sehingga volume kubus satuan ini adalah 1 cm^3.

Perhatikan gambar berikut!

Balok pada gambar (a) merupakan balok yang tersusun atas dua lapis dimana setiap lapis terdiri dari 10 kubus satuan. Banyak kubus satuan pada balok tersebut adalah $5 \times 2 \times 2 = 20$ kubus satuan. Karena satu kubus satuan bernilai 1 cm^3, maka volume balok tersebut adalah 20 cm^3. Cobalah kamu buat susunan balok yang lainnya seperti gambar (a) dengan ukuran balok yang berbeda-beda. Kemudian analisis balok tersebut, sehingga didapat volume dari balok yang kamu buat. Diskusikan hasilnya dengan temanmu!

Berdasarkan uraian di atas, secara umum, jika balok dengan ukuran rusuk panjang = p, lebar = l, dan tinggi = t, seperti terlihat pada gambar (b), maka volume balok tersebut adalah:

$$\begin{aligned}\text{Volume Balok} &= \text{panjang} \times \text{lebar} \times \text{tinggi}\\ &= p \times l \times t\end{aligned}$$

Untuk menentukan rumus volume kubus dapat diturunkan dari rumus volume balok. Karena kubus merupakan balok khusus yang ukuran panjang, lebar, dan tingginya sama, maka volume kubus yang panjang rusuknya s adalah:

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= p \times l \times t\\ &= s \times s \times s\\ &= s^3\end{aligned}$$

Maka untuk setiap kubus dengan rusuk s, berlaku rumus:

$$\text{Volume Kubus} = s^3$$

Contoh

1. Hitunglah volume balok yang berukuran panjang 29 cm, lebar 12 cm, dan tinggi 8 cm!

   Penyelesaian:

   Volume $= p \times l \times t$

   $= 29 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$

   $= 2.784 \text{ cm}^3$.

2. Jika luas alas sebuah kubus 169 cm^2, hitunglah volume kubus tersebut!

   Penyelesaian:

   Luas alas $= s^2$

   $169 \text{ cm}^2 = s^2$

   $s = \sqrt{169} \text{ cm}$

   $= 13 \text{ cm}$

   Volume $= s^3$

   $= 133$

   $= 2.197 \text{ cm}^3$.

2 Perubahan Volume Kubus dan Balok Jika Rusuknya Berubah

Jika panjang rusuk maupun balok kita ubah, maka vulomenya pun akan ikut berubah. Untuk mengetahui besarnya perubahan volume kubus dan balok dapat dilakukan dengan cara menghitung selisih antara volume sebelum perubahan dengan volume setelah perubahan.

Contoh

Panjang rusuk sebuah kubus adalah 6 cm. Jika panjang rusuknya diperpanjang menjadi 9 cm, tentukan perubahan volume kubus tersebut!

Penyelesaian:

$V_1 = s^3$

$= 6^3 = 216 \text{ cm}^3$

$V_2 = s^3$

$= 9^3 = 729 \text{ cm}^3$

Besar perubahan volume $= V_2 - V_1$

$= 729 \text{ cm}^3 - 216 \text{ cm}^3$

$= 513 \text{ cm}^3$.

Apabila perubahan rusuk dari kubus dan balok berupa kelipatan dari rusuk semula, maka kita dapat menentukan sebuah rumus untuk volume kubus dan balok setelah rusuknya berubah. Untuk mengetahuinya, lakukanlah kegiatan di bawah ini!

Tugas

Salin pada buku tugas kalian kemudian lengkapilah kedua tabel di bawah ini!

1. Tabel perubahan rusuk dan volume kubus

Rusuk Kubus		**Perubahan Rusuk** $\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$	**Volume**		Perubahan Volume $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
s_1 (cm)	s_2 (cm)		V_1 (cm^3)	V_2 (cm^3)	
6	12	2	216	1728	$8 = 2^3$
6	24	…..	…..	…..	…….
6	3	…..	…..	27	…….
6	2	$\frac{1}{3}$	……	……	……

2. Tabel perubahan rusuk dan volume balok

Rusuk balok (cm × cm × cm)		**Perubahan rusuk balok**	**Volume**		**Perubahan Volume** $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
$p_1 \times l_1 \times t_1$	$p_2 \times l_2 \times t_2$	$\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \times \left(\frac{l_2}{l_1}\right) \times \left(\frac{t_2}{t_1}\right)$	V_1 (cm^3)	V_2 (cm^3)	
4 × 3 × 2	8 × 6 × 6	2 × 2 × 3	24	288	12 = 2 × 2 × 3
4 × 3 × 2	12 × 1 × 4	…….	…..	…..	……..
4 × 3 × 2	1 × 9 × 8	…….	…..	…..	……..

Setelah kamu melengkapi kedua tabel tersebut, diskusikanlah dengan temanmu! Apa yang dapat kamu simpulkan dari kegiatan tersebut!

Bandingkanlah kesimpulan yang kamu buat dengan kesimpulan di bawah ini!

> Jika panjang rusuk sebuah kubus kedua adalah k kali rusuk kubus pertama, maka volume kubus kedua adalah k^3 kali volume kubus pertama.

Jika panjang balok kedua a kali panjang balok pertama, lebar balok kedua b kali lebar balok pertama, dan tinggi balok kedua c kali tinggi balok pertama, maka volume balok kedua adalah abc kali volume balok pertama

Latihan Soal

1. Hitunglah volume kubus yang panjang rusuknya 18 cm!
2. Hitunglah volume balok yang ukuran panjangnya 12 cm, lebar 9 cm, dan tinggi 6 cm!
3. Jika volume kubus 50.653 cm^3, hitunglah panjang rusuk kubus tersebut!
4. Jika volume balok 6.318 cm^3, hitung lebar balok yang ukuran panjang dan tingginya diketahui 27 cm dan 13 cm!
5. Hitung volume kubus yang luas permukaannya 3.456 dm^3!
6. Hitung volume balok yang luas permukaannya 460 cm^2 dan alasnya berukuran 13 × 8 m!
7. Hitung volume perubahan kubus jika rusuk yang tadinya berukuran 12 cm diperpanjang menjadi 17 cm!
8. Hitung volume perubahan balok jika ukuran panjang, lebar, dan tingginya berubah dari 18 × 12 × 8 m menjadi setengah dari ukuran semula!
9. Hitung volume awal kubus jika perbandingan rusuk kubus awal dan akhir sebesar 3 : 5, dan besar volume akhir 3.375 cm^3!
10. Hitung volume perubahan kubus jika rusuk kubus yang besarnya 5 cm diperpanjang menjadi tiga kali lipat rusuk awal!

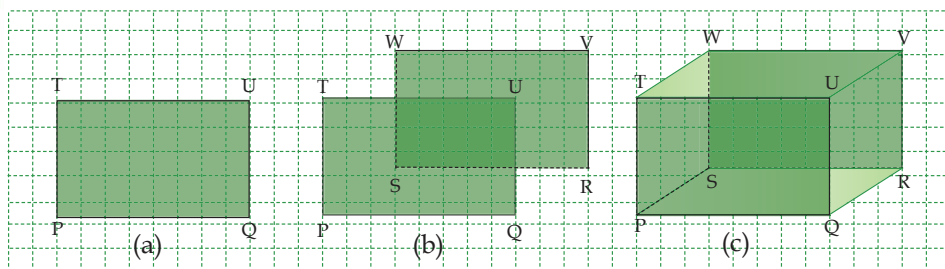
Otak-Atik Matematika

Sebuah kotak besar berbentuk balok berukuran panjang 30 cm, lebar 18 cm, dan tinggi 15 cm. Sebuah kotak kecil berbentuk kubus dengan panjang rusuk 9 cm akan dimasukkan ke dalam kotak besar tersebut. Tentukan berapa banyak kotak kecil yang dapat dimasukkan ke dalam kotak besar itu!

Rangkuman

1. Kubus adalah bangun ruang yang dibatasi oleh enam persegi yang kongruen (bentuk dan ukurannya sama). Sifat-sifat kubus:
   a. Jumlah panjang rusuknya = 12s
   b. Semua diagonal bidangnya sama panjang, yaitu $s\sqrt{2}$
   c. Semua diagonal ruangnya sama panjang, yaitu $s\sqrt{3}$
   d. Bidang diagonalnya berbentuk persegi

2. Balok adalah bangun ruang yang dibatasi oleh 3 pasang persegi panjang yang kongruen (bentuk dan ukurannya sama). Sifat-sifat balok:
   a. Jumlah panjang rusuknya = 4 $(p + l + t)$
   b. Diagonal bidang yang saling berhadapan sama panjang
   c. Semua diagonal ruangnya sama panjang, yaitu $\sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$
   d. Bidang diagonalnya berbentuk persegi panjang

3. Menggambar kubus dan balok lebih mudah menggunkan kertas berpetak.

4. Jaring-jaring kubus adalah rangkaian enam buah persegi yang apabila dilipat menurut persekutuan dua persegi akan membentuk bangun ruang kubus.
5. Jaring-jaring balok adalah rangkaian enam buah persegi panjang yang apabila dilipat menurut persekutuan dua persegi panjang akan membentuk bangun ruang balok.
6. Luas permukaan kubus = $6s^2$
7. Luas permukaan balok = $2\,[(p \times l) + (p \times t) + (l \times t)]$
8. Volume kubus = s^3
9. Volume balok = $p \times l \times t$
10. Perubahan volume kubus dan balok dapat dilakukan dengan cara menghitung selisih antara volume sebelum perubahan dengan volume setelah perubahan.

Uji Kemampuan

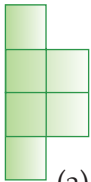
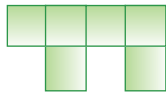
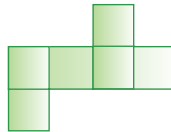
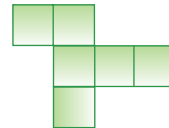
A. Pilihlah satu jawaban yang paling tepat, a, b, c, atau d! Tuliskan pada lembar jawabanmu!

1. Bangun dari bidang diagonal kubus adalah ....
   a. jajargenjang
   b. bujur sangkar
   c. persegi panjang
   d. belah ketupat

2. Banyaknya diagonal bidang balok adalah ....
   a. 6
   b. 8
   c. 10
   d. 12

3. Jika rusuk sebuah kubus panjangnya 3,5 cm, maka jumlah panjang rusuk kubus tersebut ....
   a. 38 cm
   b. 42 cm
   c. 48 cm
   d. 52 cm

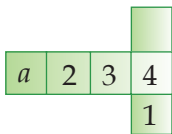
4. Sebuah balok berukuran panjang 15 cm, lebar 10 cm, dan tinggi 9 cm. Berapakah panjang rusuk balok tersebut?
   a. 361 cm^2
   b. 316 cm^2
   c. 163 cm^2
   d. 136 cm^2

5. Perhatikan rangkaian persegi di bawah ini!

(a)

(b)

(c)

(d)

   Berdasarkan gambar di atas, yang merupakan jaring-jaring kubus adalah ....
   a. (a) dan (b)
   b. (b) dan (d)
   c. (a) dan (c)
   d. (c) dan (d)

6. Perhatikan gambar di samping! Jika daerah *a* merupakan bidang tutup dari sebuah kubus, maka bidang yang menjadi alas dari kubus tersebut adalah ....

a	2	3	4
			1

   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4

7. Diketahui panjang diagonal ruang kubus adalah $\sqrt{192}$ cm. Berapakah panjang rusuk tersebut?
   a. 9 cm
   b. 8 cm
   c. 7 cm
   d. 6 cm

8. Sebuah balok berukuran panjang 12 cm, lebar 6 cm, dan tinggi 4 cm, maka luas permukaan balok adalah ....

a. 488 cm^2 c. 288 cm^2
b. 388 cm^2 d. 188 cm^2

9. Sebuah kerangka balok yang berukuran 18 cm × 10 cm × 7 cm. Jika panjang kawat yang tersedia adalah 1,5 m, maka sisa kawat yang tidak terpakai adalah ….
   a. 10 cm c. 15 cm
   b. 20 cm d. 25 cm

10. Perbandingan panjang, lebar dan tinggi sebuah balok adalah 5 : 2 : 3. Bila jumlah panjang rusuk balok itu 160 cm, maka lebar balok itu adalah ….
   a. 6 cm c. 12 cm
   b. 8 cm d. 15 cm

11. Volume balok yang berukuran 13 cm × 15 cm × 17 cm adalah ….
   a. 3.315 cm^3 c. 3.115 cm^3
   b. 3.215 cm^3 d. 3.015 cm^3

12. Volume kubus yang luas alasnya 49 cm^2 adalah ….
   a. 434 cm^3 c. 323 cm^3
   b. 343 cm^3 d. 424 cm^3

13. Sebuah kubus mempunyai panjang rusuk 6 cm. Jika panjang rusuknya diperpanjang menjadi 18 cm, maka volume kubus yang panjang rusuknya telah diperpanjang itu adalah ….
   a. 5.823 cm^3 c. 5.832 cm^3
   b. 5.283 cm^3 d. 5.382 cm^3

14. Ukuran rusuk-rusuk sebuah balok adalah 16 cm × 10 cm × 8 cm, jika rusuk-rusuk balok ini diperkecil menjadi setengah kali dari ukuran semula, maka volume balok yang terjadi adalah ….
   a. 140 cm^3 c. 150 cm^3
   b. 130 cm^3 d. 160 cm^3

15. Sebuah balok mempunyai ukuran 20 cm × 18 cm × 10 cm, jika ukuran balok tersebut diperbesar menjadi dua kali dari ukuran semula, maka besarnya perubahan volume balok tersebut adalah ….
   a. 25.200 cm^3 c. 25.020 cm^3
   b. 22.500 cm^3 d. 22.050 cm^3

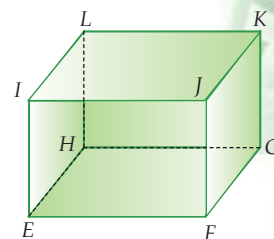
16. Sebuah balok mempunyai ukuran luas permukaan sebesar 166 m^2 , jika alas balok berukuran 7 m × 5 m, maka tinggi balok adalah ….
   a. 1 m c. 3 m
   b. 2m d. 4 m

17. Volume balok sama dengan volume kubus, yaitu 15.625 cm^3. Jika lebar dan tinggi balok berukuran 25 cm × 10 cm, maka panjang balok : rusuk kubus adalah ….
   a. 1 : 2 c. 2 : 5
   b. 1 : 2 d. 5 : 2

18. Sebuah balok mempunyai ukuran 15 cm × 12 cm × 9 cm, jika ukuran balok tersebut di perkecil menjadi sepertiga dari ukuran semula, maka besarnya perubahan volume balok tersebut adalah ….
    a. 1.530 cm^3
    b. 1.540 cm^3
    c. 1.550 cm^3
    d. 1.560 cm^3
19. Sebuah kardus mempunyai ukuran 12,5 cm × 10 cm × 8 cm, jika ke dalam kardus tersebut akan dimasukkan kubus yang berukuran 5 cm, maka banyaknya kubus yang dapat ditampung oleh kardus tersebut adalah ….
    a. 9
    b. 8
    c. 7
    d. 6
20. Besar volume perubahan jika balok yang berukuran 15 cm × 12 cm × 8 cm diperbesar menjadi 2 kali lipatnya adalah….
    a. 10.008 cm^3
    b. 10.080 cm^3
    c. 10.800 cm^3
    d. 18.000 cm^3

B. Selesaikan soal-soal berikut ini!

1. Perhatikan kubus *EFGH.IJKL* berikut ini!
    a. Sebutkan kelompok rusuk yang sejajar!
    b. Sebutkan rusuk-rusuk yang saling berpotongan!
    c. Sebutkan diagonal bidang dan diagonal ruang kubus tersebut!
    d. Gambar bidang diagonal kubus tersebut!

2. Diketahui panjang rusuk sebuah kubus adalah 19 cm. Hitunglah:
    a. Jumlah panjang rusuk
    b. Panjang diagonal bidang
    c. Panjang diagonal ruang
    d. Luas permukaan
    e. Volume
3. Sebuah balok mempunyai ukuran 25 cm × 8 cm × 10 cm. Hitunglah:
    a. Jumlah panjang rusuk
    b. Panjang diagonal ruang
    c. Luas permukaan
    d. Volume
4. Volume sebuah balok adalah 4.096 cm^3. Jika panjang balok tersebut adalah 32 cm dan lebarnya 16 cm, hitunglah tinggi balok tersebut!
5. Sebuah bak kamar mandi berbentuk balok berukuran 2 m × 1,5 m × 1 m. Jika Susi memakai air yang ada di bak tersebut sebanyak 1.300 liter, hitunglah sisa air yang ada di dalam bak tersebut!
6. Sofiah mempunyai kardus yang berukuran panjang, lebar, dan tinggi berturut-turut 150 cm, 120 cm, dan 90 cm. Ke dalam kardus tersebut akan dimasukkan

kubus-kubus yang berukuran kecil. Berapa kubus kecil yang dapat ditampung jika ukuran kubus kecil yang dimasukkan adalah:
   a. 5 cm
   b. 10 cm
   c. 15 cm

7. Sebuah kolam ikan yang berbentuk balok mempunyai ukuran panjang 6 m, lebar 5 m, dan tinggi 2 m.
   a. Berapa liter air yang dapat ditampung oleh kolam ikan tersebut!
   b. Air dari kolam ikan tersebut akan dipindahkan ke dalam kolam ikan lainnya. Berapa lebar kolam ikan yang baru jika ukuran panjang dan tinggi kolam ikan yang baru berturut-turut 8 m dan 2,5 m!

KUNCI JAWABAN BAB 8

A. Pilihan Ganda

1. b
3. b
5. d
7. b
9. a
11. a
13. c
15. a
17. d
19. b

B. **Uraian**

1. a. *EI//FJ//GK/LH, EF//GH//IJ//KL, IL//JK//EH//FG.*
   c. Diagonal bidangnya: *EJ, IF, KF, GJ, EG, FG, HK, GL, IK, JL, EL, IH.*
   Diagonal ruangnya: *GI, EK, FL, HJ*
3. a. 172 cm
   c. 1.060 cm^2
5. a. 1.700 liter
7. a. 60.000 liter
   b. 3 m

Bab

Prisma dan Limas

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini siswa diharapkan mampu:
- Mengenal dan menyebutkan bidang, rusuk, diagonal bidang, diagonal ruang, bidang diagonal, dan tinggi prisma dan limas tegak;
- Menggambar prisma dan limas tegak;
- Menggambar jaring-jaring prisma dan limas tegak, serta menghitung luas permukaannya;
- Menemukan rumus dan menghitung volume prisma dan limas tegak;
- Merancang prisma dan limas tegak untuk volume tertentu;
- Menghitung besar perubahan volume bangun prisma dan limas tegak jika ukuran rusuknya berubah.

Sumber : Encarta

Bangunan piramida merupakan salah satu dari tujuh keajaiban dunia. Betapa tidak, bangunan megah dan indah ini dibangun pada zaman Mesir kuno, tepatnya berada di Gizeh. Orang-orang pada zaman itu tentu memiliki pengetahuan yang sangat terbatas mengenai bangun ruang. Rusuk alas piramida tersebut sebesar 230 m dan tingginya sekitar 146 m. Dapatkah kalian menghitung luas permukaan piramida tersebut?

Konsep dasar piramida menyerupai bangun ruang limas. Oleh karena itu, cara menghitung luas piramida dapat menggunakan rumus luas limas. Masih ingatkah cara menghitung luas limas? Mari kita mengingatnya kembali pada pembahasan berikut!

Peta konsep

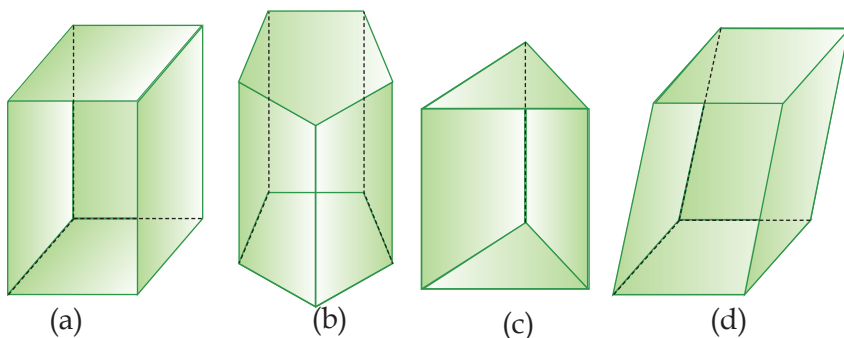
Prisma dan limas
A. Pengertian prisma dan limas
1. Prisma
2. Limas
B. Bagian-bagian prisma dan limas
1. Bidang diagonal prisma
2. Bidang diagonal limas
C. Menggambar prisma dan limas
1. Menggambar prisma
2. Menggambar limas
D. Jaring-jaring prisma dan limas
1. Jaring-jaring prisma
2. Jaring-jaring limas
E. Luas permukaan prisma dan limas
1. Luas permukaan prisma
2. Luas permukaan limas
F. Volume prisma dan limas
1. Volume prisma
2. Volume limas
3. Perubahan volume prisma dan limas jika rusuknya berubah

A Pengertian Prisma dan Limas

Pada pembahasan sebelumnya, kalian telah mempelajari bangun ruang kubus dan balok. Sedangkan pada pembahasan kali ini kita akan mempelajari bentuk bagun ruang yang lain, yaitu prisma dan limas. Apakah yang dimaksud dengan bangun ruang prisma dan limas?

1 Prisma

Perhatikan gambar bangun ruang berikut!

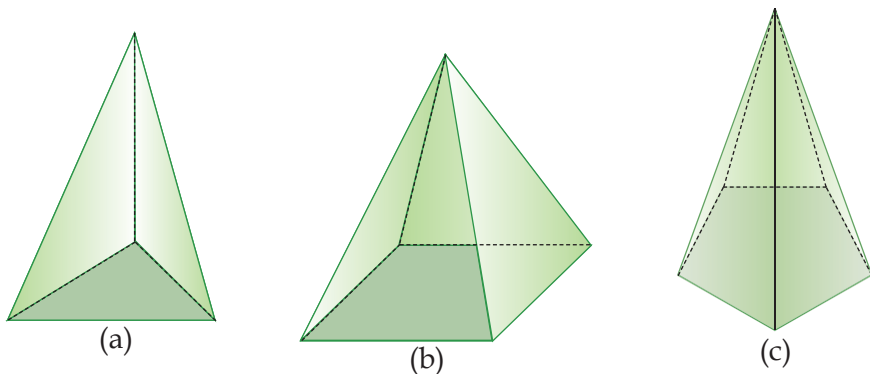
(a) (b) (c) (d)

Bangun-bangun ruang di atas semuanya mempunyai dua bidang yang sejajar serta bidang-bidang lainnya berpotongan menurut garis-garis yang sejajar. Bangun-bangun ruang seperti inilah yang dinamakan prisma. Jadi prisma adalah bangun ruang yang memiliki sepasang bidang sejajar dan kongruen yang merupakan alas dan tutup. Sedangkan bidang-bidang lainnya diperoleh dengan menghubungkan titik-titik sudut dari dua bidang yang sejajar.

Jenis prisma ada beberapa macam yang diberi nama sesuai bentuk alas prisma. Contoh, gambar (a) dinamakan prisma segi empat karena dua bidang yang sejajar berupa segi empat. Gambar (b) dinamakan prisma segilima, sedangkan gambar (c) dinamakan prisma segitiga.

> *Tokoh*
>
> Plato adalah seorang filosof Yunani yang mencoba menerangkan alam semesta dengan mengkaji lima buah bangun ruang, yang selanjutnya dikenal dengan nama 'bangun-bangun ruang Platonik'.
>
>
>
> (*Sumber: Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*)

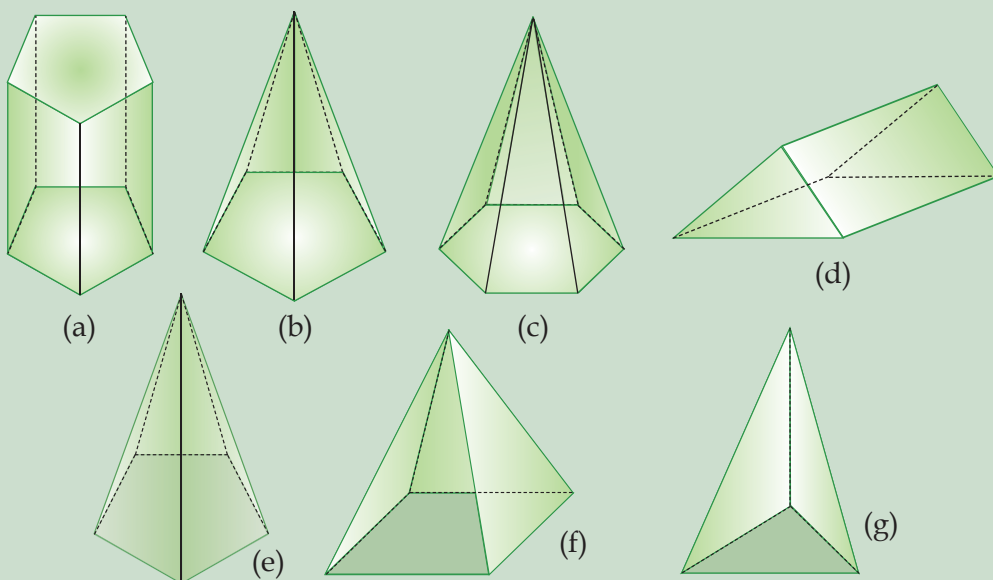
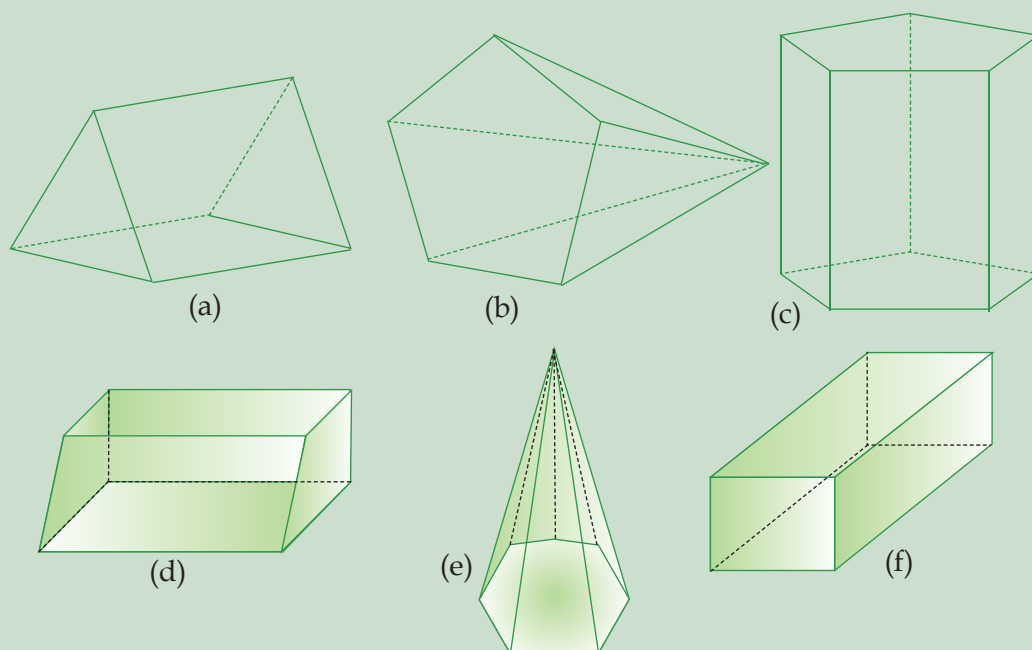
Jika kita perhatikan semua prisma (a), (b), dan (c) mempunyai rusuk-rusuk yang tegak. Prisma seperti ini dinamakan prisma tegak. Sebaliknya jika kita perhatikan gambar prisma (d) mempunyai rusuk-rusuk tidak tegak lurus dengan alas dan tutupnya. Prisma seperti ini dinamakan prisma miring. Pada bab ini, kita akan membahas prisma tegak saja.

2 Limas

Sekarang perhatikan bangun-bangun ruang di bawah ini!

Bangun-bangun ruang di atas memiliki satu bidang sebagai alas, sedangkan bidang-bidang lainnya berbentuk segitiga yang bertemu pada satu titik puncak. Bangun ruang seperti inilah yang dinamakan limas.

Jenis limas ada beberapa macam dan diberi nama sesuai dengan bentuk bidang alasnya. Misalnya, gambar (a) dinamakan limas segitiga, gambar (b) disebut limas segiempat, sedangkan gambar (c) dinamakan limas segilima. Dapatkah kamu menyebutkan bentuk limas yang lain?

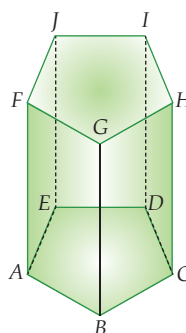
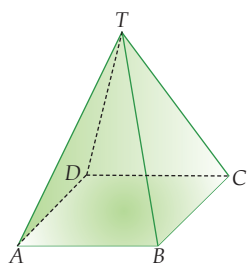
Latihan Soal

1. Sebutkanlah nama-nama dari bangun ruang di bawah ini!

2. Sebutkanlah nama-nama dari bangun ruang di bawah ini!

B Bagian bagian Prisma dan Limas

Cobalah ingat kembali definisi-definisi dari bidang, rusuk, titik sudut, diagonal bidang, dan diagonal ruang sebuah bangun ruang. Kemudian, pelajarilah contoh yang membahas prisma berikut ini.

Gambar di samping adalah prisma segilima *ABCDE.FGHIJ*. Bidang pada prisma tersebut adalah *ABCDE* (bidang alas) dan *FGHIJ* (bidang tutup) yang berbentuk segilima. Sedangkan bidang-bidang tegaknya, yaitu *ABGF*, *BCHG*, *CDIH*, *DEJI*, dan *EAFJ* yang berbentuk persegi panjang.

Jumlah rusuk pada prisma segilima ini adalah 15 buah, dengan rusuk tegaknya adalah *AF*, *BG*, *CH*, *DI*, dan *EJ*. Sedangkan rusuk-rusuk lainnya adalah *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*, *FG*, *GH*, *HI*, *JF*, dan *IJ*.

Selanjutnya, pelajarilah contoh limas berikut ini.

Gambar di samping adalah limas segiempat *T.ABCD*.

Bidang alas limas tersebut, yaitu *ABCD*, berbentuk segiempat, serta bidang-bidang tegak lainnya, yaitu *TAB, TBC, TCD*, dan *TAD* berbentuk segitiga.

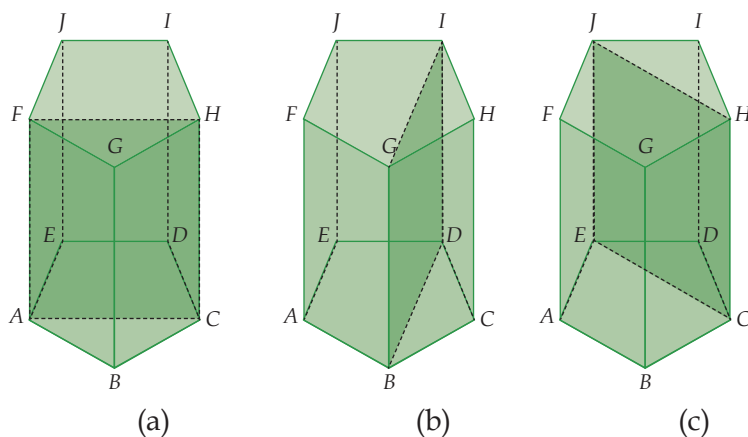
Jumlah rusuk limas segiempat ini adalah 8 buah. Rusuk tegaknya adalah *TA, TB, TC*, dan *TD*, sedangkan rusuk-rusuk lainnya adalah *AB, BC, CD*, dan *DA.*

Tugas

Dari kedua contoh yang membahas tentang bagian-bagian prisma dan limas di atas, adakah bagian prisma dan limas yang belum dibahas?

Coba sebutkan semua titik sudut, diagonal bidang, dan diagonal ruang prisma dan limas pada kedua contoh tersebut. Jika kamu dapat menyebutkannya, berarti kamu telah memahami bagian-bagian prisma dan limas dengan baik.

1 Bidang Diagonal Prisma

Perhatikan gambar berikut ini!

Gambar di atas merupakan gambar prisma segilima beraturan *ABCDE.FGHIJ*. Bidang *ACHF* pada gambar (a) merupakan bidang diagonal prisma yang dibatasi oleh dua buah diagonal bidang, serta dua buah rusuk tegak. Bidang seperti *ACHF* inilah yang dinamakan dengan bidang diagonal prisma. Dapatkah kamu menyebutkan bidang diagonal lainnya selain bidang *ACHF* pada prisma di atas? Coba kalian tunjukkan! Berapa banyak bidang

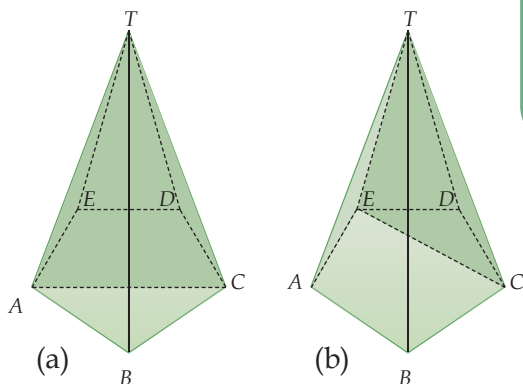
diagonal lainnya yang dapat kamu temukan?

Perhatikan kembali bidang diagonal *ACHF* pada gambar (a). Bidang ini dibatasi oleh diagonal bidang *AC* dan *FH* yang saling sejajar dan sama panjang, serta dua rusuk tegak *AF* dan *CH* yang sejajar, sama panjang, dan tegak lurus dengan bidang alas dan tutup, maka bentuk dari bidang diagonal *ACHF* adalah persegi panjang. Selidikilah bentuk bidang diagonal yang lainnya!

Tokoh

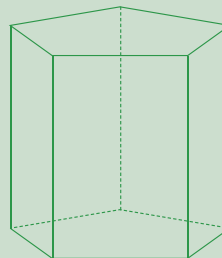
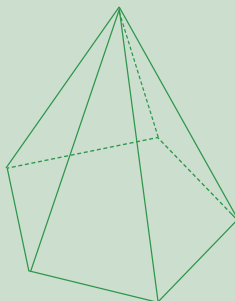
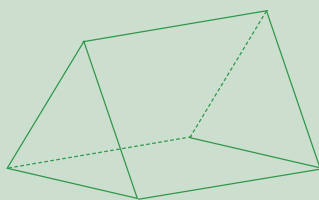
Leonhard Euler (1707-1783) adalah matematikawan yang menyatakan bahwa terdapat hubungan diantara banyaknya titik sudut, banyaknya rusuk, dan banyaknya bidang dari bangun ruang tersebut. Ia mengemukakan bahwa e-k+f = 2, dimana e adalah banyaknya titik sudut, k banyaknya rusuk, dan f banyaknya sisi.

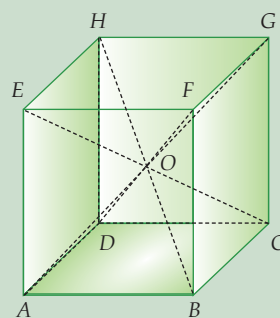
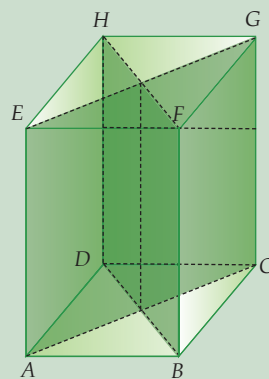
2 Bidang Diagonal Limas

Perhatikan gambar di berikut!

Gambar di atas merupakan gambar limas segilima beraturan *T.ABCDE*. Bidang *TAC* pada gambar (a) dan bidang *TEC* pada gambar (b) merupakan bidang diagonal limas *T.ABCDE*. Bidang diagonal limas dibatasi oleh satu buah diagonal bidang dan dua buah rusuk limas.

Dari gambar, terlihat bahwa bidang diagonal limas berbentuk segitiga dengan sisi alas merupakan diagonal bidang alas limas tersebut.

Latihan Soal

1. Tentukan banyaknya bidang tegak, bentuk alasnya, dan banyaknya rusuk dari bangun ruang berikut

2. Jiplaklah semua bangun ruang pada soal nonmor 1, kemudian gambarlah salah satu bidang diagonal dari masing-masing bangun ruang tersebut!

3. Pada gambar di samping, kubus *ABCD*. *EFGH* dipotong berdasarkan semua diagonal ruang dari kubus tersebut, sehingga terbentuk beberapa limas dengan titik puncak *O*.
   a. Berapakah banyaknya limas yang terbentuk?
   b. Sebutkanlah nama-nama limas yang terbentuk!

4. Pada gambar di samping, balok *ABCD.EFGH* dipotong berdasarkan bidang diagonal *ACGE* dan *BDHF*, sehingga terbentuk beberapa prisma.
   a. Berapakah banyaknya prisma yang terbentuk?
   b. Apa bentuk bidang alas dan bidang tutupnya?
   c. Sebutkan nama-nama prisma yang terbentuk tersebut!

C Menggambar Prisma dan Limas

Untuk mempermudah kita dalam menggambar bangun ruang prisma dan limas, sebaiknya kita menggunakan kertas berpetak.

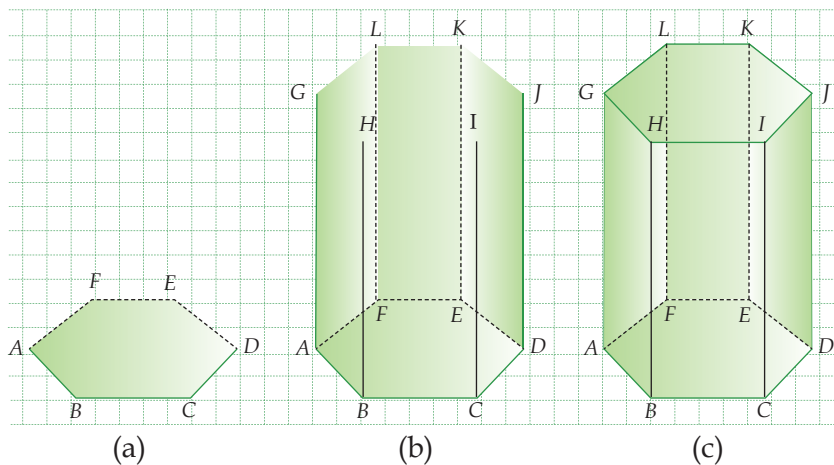
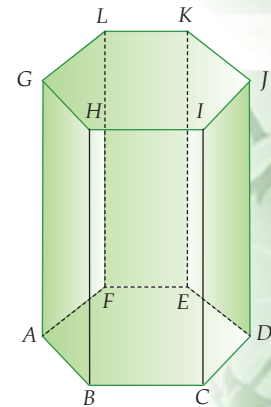
1 Menggambar Prisma

Untuk menggambar sebuah prisma, ada beberapa hal yang perlu kita perhatikan, yaitu:

a. Terdapat dua bidang yang sejajar dan kongruen (bentuk dan ukurannya sama) yaitu bidang alas dan bidang tutup.
b. Rusuk-rusuk tegak pada prisma panjangnya sama.
c. Rusuk-rusuk yang tidak terlihat oleh pandangan, digambar dengan garis putus-putus.

Berdasarkan ketiga hal di atas, marilah kita menggambar sebuah prisma, misalnya prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL*. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

1. Gambar bidang alas terlebih dahulu, yaitu bidang *ABCDEF* (gambar (a)). Garis *AF, FE,* dan *ED* digambar dengan garis putus-putus.
2. Gambar rusuk tegak *AG, BH, CI, DJ, EK*, dan *FL* dengan ukuran yang sama panjang (gambar (b)). Garis *EK* dan *FL* digambar dengan garis putus-putus.
3. Terakhir gambar bidang tutup, yaitu bidang *GHIJKL*, dengan cara menghubungkan titik-titik *G, H, I, J, K* dan *L* gambar (c).

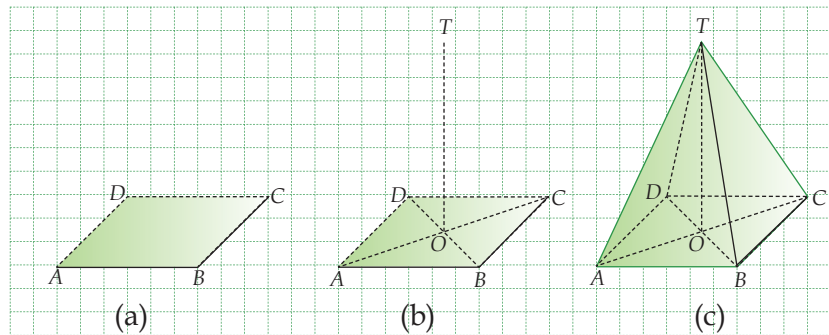
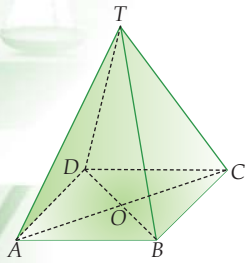
(a) (b) (c)

2 Menggambar Limas

Ada beberapa hal yang perlu kalian perhatikan saat menggambar sebuah limas, yaitu:

a. Terdapat bidang alas yang berupa bangun datar, seperti segitiga, persegi, persegi panjang, atau bangun datar lain nya.
b. Terdapat garis tinggi limas, yaitu garis yang tegak lurus dengan bidang alas dan melalui titik puncak limas.
c. Rusuk-rusuknya sama panjang dan ujungnya bertemu pada titik puncak.

d. Rusuk-rusuk yang tidak terlihat oleh pandangan, digambar dengan garis putus-putus.

Berdasarkan hal-hal di atas, mari kita menggambar sebuah limas, misalnya limas segi empat T.ABCD. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

1. Gambar bidang alas terlebih dahulu, yaitu bidang *ABCD* (gambar (a)). Garis *AD* dan *CD* digambar dengan garis putus-putus.
2. Buat garis tinggi limas, yaitu *TO* dengan *O* adalah titik perpotongan diagonal bidang alas (gambar (b)).
3. Gambar rusuk-rusuk *TA*, *TB*, *TC* dan *TD* dengan cara menghubungkan masing-masing titik sudut bidang alas, yaitu *A*, *B*, *C*, dan *D*, dengan titik *T* (gambar(c)).

Latihan Soal

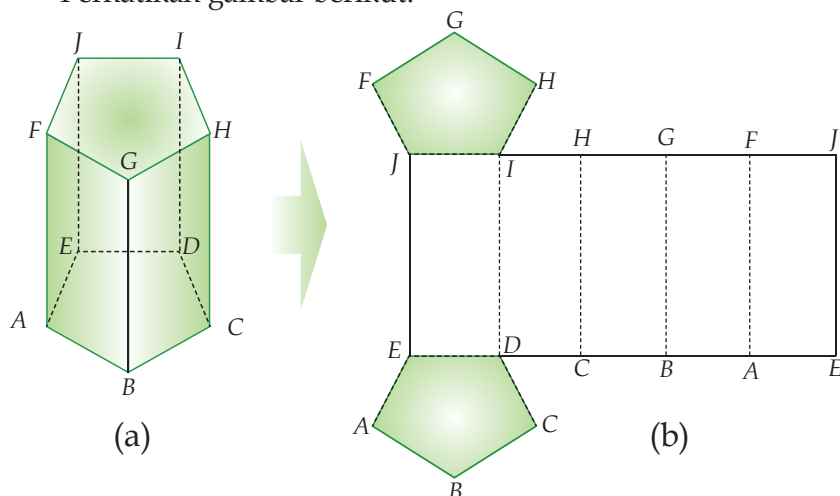
Kerjakan soal-soal berikut pada kertas berpetak!

1. Gambarlah prisma segitiga sebarang dengan tinggi prisma 5 satuan. Arsirlah bidang alas dan tutupnya!
2. Gambarlah prisma trapesium dengan tinggi prisma 7 satuan. Berilah nama pada prisma tersebut. Kemudian, sebutkanlah kelompok rusuk-rusuk yang sejajar dan kelompok rusuk-rusuk yang saling berpotongan!
3. Gambarlah limas segiempat dengan panjang alas 5 satuan dan tinggi limas 6 satuan. Arsirlah bidang alasnya!
4. Gambarlah limas segienam dengan tinggi prisma 8 satuan. Berilah nama pada limas tersebut, kemudian sebutkanlah rusuk-rusuk tegak dari limas tersebut!
5. Gambarlah prisma segienam dengan tinggi 3 kali panjang alas dan limas segitiga dengan alas 4 satuan serta tinggi 6 satuan!

aring aring Prisma dan Limas

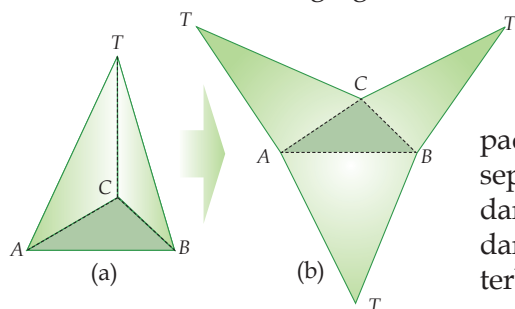
Pada subbab ini, kita akan membahas tentang jaring-jaring prisma dan limas. Ingatlah kembali pengertian jaring-jaring suatu bangun ruang yang telah kita bahas pada bab sebelumnya.

1 Jaring-Jaring Prisma

Perhatikan gambar berikut!

Jika prisma segilima *ABCDE.FGHIJ* pada gambar (a) kita iris sepanjang rusuk *EA, AB, BC, CD, JF, FG, GH*, dan *HI*, kemudian kita buka dan bentangkan, maka akan membentuk bangun datar seperti terlihat pada gambar (b). Gambar (b) tersebut merupakan jaring-jaring prisma segilima. Dapatkah kamu membuat jaring-jaring prisma segilima yang lainnya?

> ***Math Info***
>
> Sumbangan besar dari matematika, khususnya geometri pada bidang arsitektur dan perancangan industri adalah proyeksi. Proyeksi digunakan untuk menunjukkan sisi-sisi dari benda tiga dimensi pada permukaan yang mempunyai dua dimensi.

2 Jaring-Jaring Limas

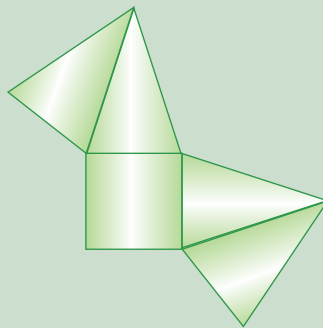
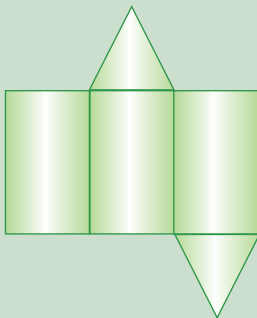
Perhatikan limas segitiga T.ABC berikut!

Jika limas segitiga *T.ABC* pada gambar (a) kita iris sepanjang rusuk *TA*, *TB*, dan *TC*, kemudian kita buka dan bentangkan, maka akan terbentuk jaring-jaring limas seperti pada gambar (b). Dari gambar (a), dapatkah kamu membuat jaring-jaring limas yang lainnya?

Tugas

Carilah masing-masing sebuah benda yang berbentuk prisma dan limas. Misalnya dus pembungkus minuman, makanan ataupun yang lainnya.

1. Irislah benda tersebut pada rusuk yang kamu inginkan, akan tetapi jangan sampai ada bidang yang terputus.
2. Buka dan bentangkan hasil irisan yang telah kamu buat.
3. Bandingkan jaring-jaring prisma dan limas yang kamu dapatkan dengan hasil jaring-jaring prisma dan limas temanmu.
4. Buatlah kesimpulan berdasarkan kegiatan ini.

Latihan Soal

1. Jiplak kedua gambar di bawah ini!
   Kemudian gunting gambar tersebut menurut garis tepinya, lipatlah menurut garis persekutuan bidangnya! Berbentuk apakah bangun tersebut?

2. Gambarlah bangun-bangun ruang berikut beserta jaring-jaringnya!
   a Prisma layang-layang dan jaring-jaringnya.
   b. Limas segilima beraturan dan jaring-jaringnya.
   c. Limas belah ketupat dan jaring-jaringnya.
   d. Prisma segitiga dan jaring-jaringnya.
   e. Prisma trapesium dan jaring-jaringnya.

E Luas Permukaan Prisma dan Limas

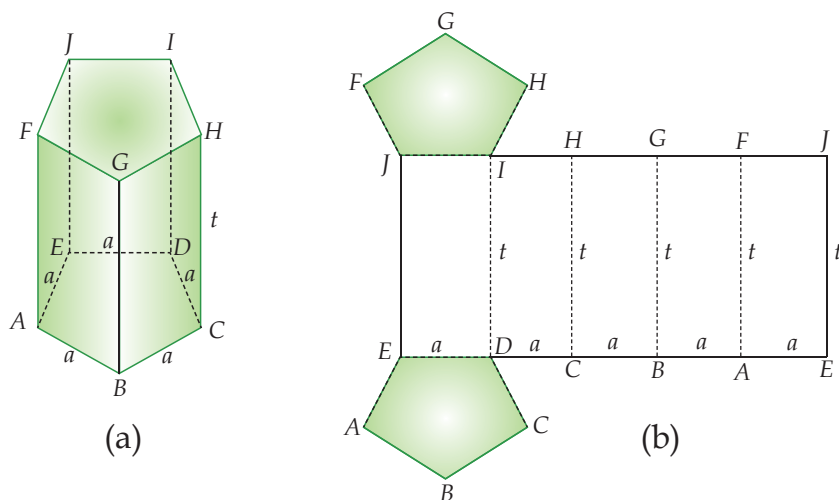
Kalian telah mempelajari bahwa luas permukaan bangun ruang dapat ditentukan dengan menghitung jumlah luas-luas bidang yang membatasinya. Hal ini juga berlaku pada limas dan prisma.

Luas permukakan prisma dan limas dapat ditentukan dengan menghitung luas bidang yang membatasinya, yaitu luas dari jaring-jaringnya.

1 Luas Permukaan Prisma

Misalkan kita memiliki prisma segilima *ABCDE.FGHIJ* seperti terlihat pada gambar (a) dan bentuk jaring-jaringnya pada gambar (b). Maka luas permukaan prisma adalah sebagai berikut.

(a)

(b)

Luas permukaan prisma segilima *ABCDE.FGHIJ* = luas bidang *EABCD* + luas bidang *IHGFJ* + luas bidang *EDIJ* + luas bidang *DCHI* + luas bidang *CBGH* + luas bidang *BAFG* + luas bidang *AEJF*

Karena bidang alas dan bidang tutup prisma kongruen, maka luas *EABCD* = luas *IHGFJ*, sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk berikut.

Luas permukaan prisma = luas bidang *EABCD* + luas bidang *EABCD* + $a \times t + a \times t + a \times t + a \times t + a \times t$

$= 2 \times$ luas *EABCD* + $(a + a + a + a + a) \times t$

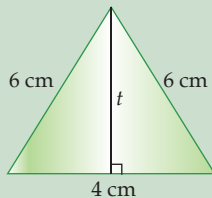
$= (2 \times \text{luas alas}) + (\text{keliling alas} \times \text{tinggi prisma})$

Maka untuk setiap prisma berlaku rumus:

Luas permukaan prisma = (2 × luas alas) + (keliling alas × tinggi prisma)

Contoh

Alas sebuah prisma berbentuk segitiga sama kaki dengan panjang sisi-sisinya 6 cm, 6 cm dan 4 cm. Jika tinggi prisma 9 cm, hitunglah luas permukaan prisma tersebut!

Penyelesaian:

Terlebih dahulu kita harus mencari tinggi segitiga alasnya.

$t = \sqrt{6^2 - 2^2}$

$= \sqrt{36 - 4}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ cm

$= 5,66$ cm

Luas permukaan prisma

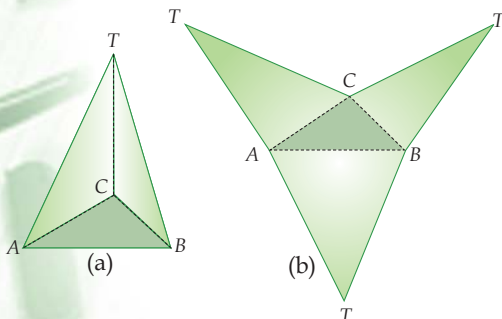
= 2 × luas alas + (keliling alas × tinggi prisma)

$= (2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 5,66) + [(6 + 6 + 4) \times 9]$

$= 22,63 + 144 = 166,63 \text{ cm}^2$.

2 Luas Permukaan Limas

Perhatikan limas segitiga *T.ABC* pada gambar (a) dan jaring-jaring limas pada gambar (b). Luas permukaan limas tersebut adalah sebagai berikut.

(a) (b)

Luas permukaan limas *T.ABC*

= luas bidang *ABC* + luas bidang *TAB* + luas bidang *TBC* + luas bidang *TCA*

= luas alas + luas ΔTAB + luas ΔTBC + luas ΔTCA

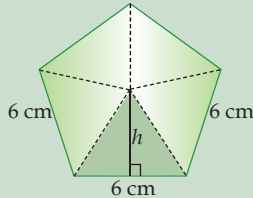
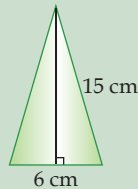
= luas alas + jumlah luas semua segitiga tegak

Maka untuk setiap limas berlaku rumus:

Luas permukaan limas = luas alas + jumlah luas semua segitiga tegak

Contoh

Alas sebuah limas beraturan berbentuk segilima dengan panjang sisi 6 cm. Jika tinggi segitiga pada bidang tegak 15 cm, tentukanlah luas alas dan luas permukaan limas tersebut!

Penyelesaian:

Bidang alas

Bidang tegak

Untuk menghitung luas alasnya, kita harus menghitung tinggi segitiga pada alas limas.

$h = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ cm

Maka luas alas $= 5 \times$ luas Δ

$= 5 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 45\sqrt{3}\text{ cm}^2 = 77{,}94\text{ cm}^2$

Luas permukaan limas

= luas alas + (5 × luas Δ bidang tegak)

$= 77{,}94 + (5 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 15)$

$= 77{,}94 + 225$

$= 302{,}94\text{ cm}^2$.

Latihan Soal

1. Alas sebuah prisma berbentuk belah ketupat dengan panjang diagonal 20 cm dan 15 cm. Hitunglah luas permukaan prisma tersebut jika tinggi prisma adalah 12 cm!
2. Alas sebuah prisma berbentuk trapesium dengan panjang sisi sejajarnya 18 cm dan 12 cm, serta tinggi trapesium tersebut adalah 6 cm. Hitunglah luas permukaan prisma jika tinggi prisma adalah 9 cm!
3. Alas sebuah limas berbentuk segitiga sebarang dengan panjang sisi-sisinya 6 cm, 9 cm, dan 11 cm. Hitunglah luas permukaan limas tersebut jika tinggi limas 10 cm!
4. Alas sebuah limas berbentuk persegi dengan panjang sisi 12 cm. Hitunglah luas permukaan limas tersebut jika tinggi limas 12 cm!

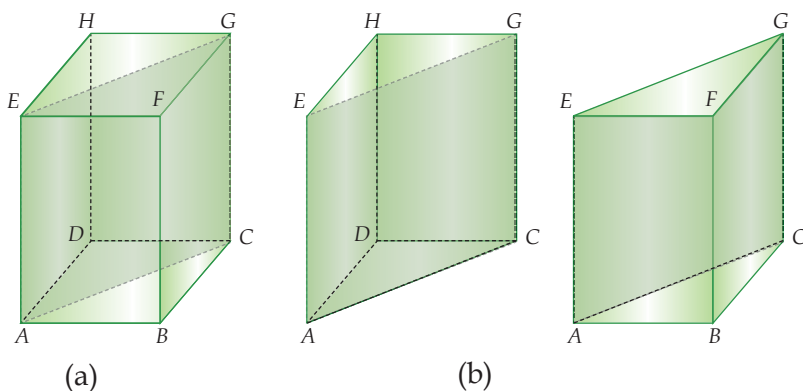
5. Sebuah dus kemasan coklat berbentuk prisma segilima beraturan dengan panjang sisi 3 cm. Jika tinggi dus kemasan coklat tersebut 13 cm, berapakah luas dus kemasan coklat tersebut?
6. Sebuah lilin aroma terapi berbentuk limas dengan alas berbentuk persegi dengan panjang sisi 24 cm dan tinggi lilin 9 cm. Lilin tersebut dibungkus dengan plastik sehingga seluruh permukaannya tertutup. Hitunglah luas plastik untuk menutupi lilin tersebut!

F Volume Prisma dan Limas

Volume merupakan isi dari suatu bangun ruang. Volume bangun ruang dapat ditentukan dengan menggunakan rumus. Bagaimana menentukan rumus volume prisma atau limas?

1 Volume Prisma

Untuk menentukan rumus umum volume sebuah prisma, marilah kita tinjau rumus volume prisma segitiga. Rumus volume prisma segitiga dapat diturunkan dari rumus volume balok. Perhatikanlah gambar berikut ini.

(a) (b)

Jika balok *ABCD.EFGH* pada gambar (a) dibagi dua melalui bidang diagonal *ACGE*, maka akan diperoleh dua buah prisma segitiga, yaitu prisma ACD.EGH dan prisma ABC.EFG. Karena bidang diagonal balok membagi balok menjadi dua bagian sama besar, maka volume balok sama dengan dua kali volume prisma segitiga. Maka volume prisma segitiga dapat dirumuskan:

$$\text{Volume prisma segitiga} = \frac{1}{2} \times \text{volume balok } ABCD.EFGH$$
$$= \frac{1}{2} \times AB \times BC \times CG$$

$= \frac{1}{2} \times$ luas bidang $ABCD \times CG$

$= \frac{1}{2} \times$ (luas ΔABC + luas ΔACD) $\times CG$

$= \frac{1}{2} \times$ (2 × luas ΔABC) $\times CG$

$=$ luas $\Delta ABC \times CG$

$=$ luas alas × tinggi prisma

Bangsa Mesir kuno sudah dapat menghitung isi limas dengan rumus $\frac{1}{4}$ x luas alas x tinggi. Bandingkan dengan rumus volume limas yang digunakan saat ini!

Apakah untuk menentukan rumus volume prisma yang lain dapat menggunakan rumus volume prisma segitiga? Perhatikan gambar di samping!

Jika prisma segienam beraturan kita iris pada bidang diagonal *ADJG*, bidang diagonal *BEKH*, dan bidang diagonal *CFLI*, maka kita akan mendapatkan enam buah prisma segitiga beraturan. Maka volume prisma segienam dapat dinyatakan dalam bentuk berikut.

Volume prisma segienam *ABDEF.GHIJKL*

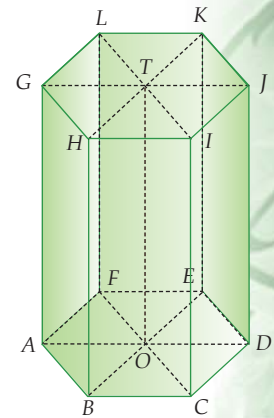
= 6 × volume prisma segitiga *BCO.HIT*

= 6 × luas *BCO* × *TO*

= luas segienam *ABCDEF* × *TO*

= luas alas × tinggi prisma

Maka untuk setiap prisma berlaku rumus:

Volume prisma = luas alas × tinggi prisma

Contoh

Alas sebuah prisma berbentuk trapesium sama kaki dengan panjang sisi-sisi sejajarnya adalah 12 cm dan 20 cm, serta sisi miringnya 5 cm. Jika tinggi prisma tersebut 25 cm, hitunglah volume prisma!

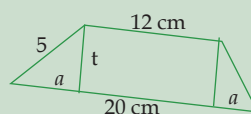
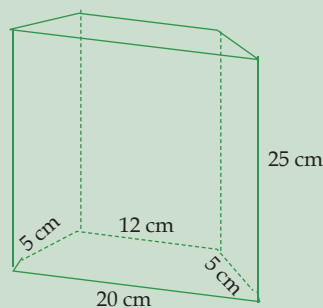
Penyelesaian:

Sebelum mencari volume prisma, kita harus mencari luas alas prisma tersebut.

$2a = 20 - 12 = 8$

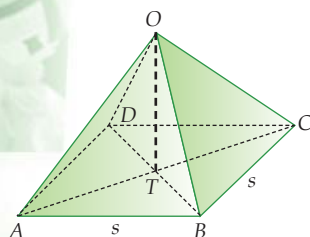
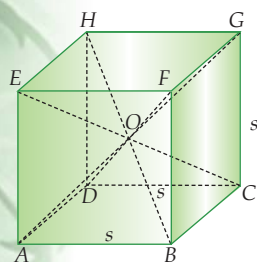
$a = 4$ cm

$t = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$

$= 3$ cm

$$\text{Luas alas} = \frac{(20+12)}{2} \times 3 = \frac{32}{2} \times 3 = 16 \times 3 = 48 \text{ cm}^2$$

Jadi, volume prisma adalah:

V = luas alas × tinggi prisma

= 48 × 25 = 1.200 cm^3.

2 Volume Limas

Untuk menentukan rumus volume limas, dapat dicari dengan bantuan sebuah kubus. Perhatikan gambar kubus di samping!

Jika kita membuat semua diagonal ruangnya maka diagonal-diagonal tersebut akan berpotongan pada satu titik dan membagi kubus *ABCD.EFGH* menjadi enam limas segiempat yang kongruen. Dapatkah kamu menyebutkan nama dari keenam limas tersebut?

Dari uraian di atas dapat diperoleh bahwa luas enam limas segiempat sama dengan luas kubus. Dengan demikian:

$$\begin{aligned}
\text{volume limas} &= \frac{1}{6} \times \text{volume kubus} \\
&= \frac{1}{6} \times s^3 = \frac{1}{6} \times s \times s \times s \\
&= \frac{1}{6} \times (s \times s) \times 2 \times \frac{1}{2} s \\
&= \frac{1}{6} \times 2 \times \text{luas bidang ABCD} \times \text{TO} \\
&= \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi limas}
\end{aligned}$$

$$\text{Volume limas} = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi limas}$$

Contoh

Alas sebuah limas beraturan berbentuk persegi dengan panjang sisi 12 cm. Jika tinggi segitiga pada bidang tegaknya adalah 10 cm, hitunglah tinggi limas dan volume limas tersebut!

Penyelesaian:

Perhatikan gambar limas berikut!

Dari soal diketahui bahwa

$AB = 12$ cm, $TE = 10$ cm

$OE = AB : 2 = 12 : 2 = 6$ cm

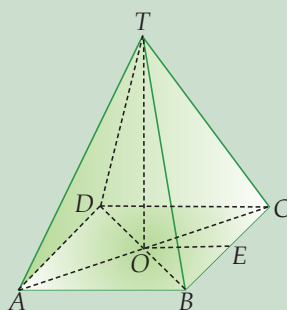
Sehingga, tinggi limas adalah

$TO = \sqrt{TE - OE} = \sqrt{10^2 - 6^2}$

$= \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ cm

Maka volume limas tersebut adalah

$V = \frac{1}{3} \times$ luas alas $\times$ tinggi limas

$= \frac{1}{3} \times (12 \times 12) \times 8 = 384 \text{ cm}^3$.

3 Perubahan Volume Prisma dan Limas Jika Rusuknya Berubah

Volume prisma dan limas bergantung pada ukuran alas dan tinggi dari prisma dan limas tersebut. Jika ukuran alas dan tingginya kita ubah, maka volumenya pun akan berubah. Untuk mengetahui besar perubahan volume, kita dapat mencarinya dengan cara menghitung selisih volume sebelum dan setelah perubahan.

Contoh

Alas sebuah prisma berbentuk segitiga siku-siku dengan panjang sisi-sisinya 3 cm, 4 cm, dan 5 cm. Tinggi prisma 10 cm. Jika panjang sisi segitiga diperbesar dua kali, sedangkan tingginya tetap, berapakah besar perubahan volume prisma tersebut?

Penyelesaian:

Volume mula-mula $= \frac{1}{3} \times$ luas alas $\times$ tinggi limas

$= \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times 3 \times 4) \times 10 = 20 \text{ cm}^3$.

Panjang sisinya diperbesar menjadi dua kali, maka panjang sisinya menjadi 6 cm, 8 cm, dan 10 cm, sehingga

Volume setelah diperbesar $= \frac{1}{3} \times$ luas alas $\times$ tinggi limas

$= \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times 6 \times 8) \times 10 = 80 \text{ cm}^3$.

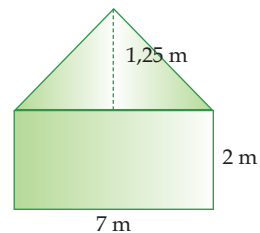
Jadi, besar perubahan volume prisma $= 80 \text{ cm}^3 - 20 \text{ cm}^3 = 60 \text{ cm}^3$.

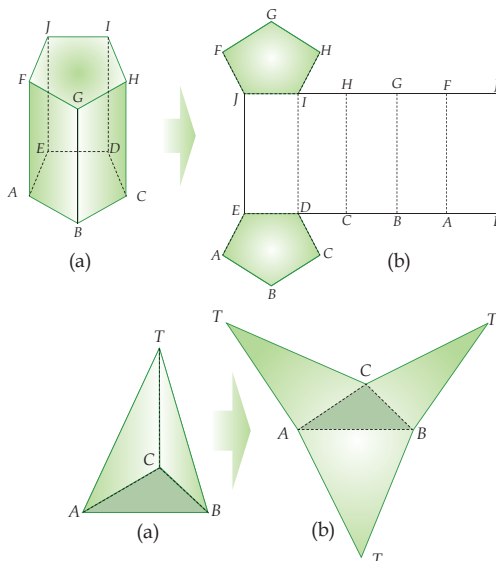
Latihan Soal

1. Alas sebuah prisma berbentuk segitiga sama kaki dengan panjang sisi alanya 10 cm dan panjang kakinya 8 cm. Hitunglah volume prisma tersebut jika tinggi prisma 9 cm!
2. Alas sebuah prisma berbentuk persegi panjang dengan panjang 12 cm dan lebar 7 cm. Hitunglah volume prisma jika tingginya 11 cm!
3. Alas sebuah limas berbentuk persegi panjang dengan panjang 10 cm dan lebar 6 cm. Hitunglah volume limas tersebut jika tingginya 17 cm!
4. Alas sebuah limas berbentuk persegi. Volume limas tersebut adalah 64.000 cm^3. hitunglah panjang sisi alas persegi jika tinggi limas 120 cm!
5. Sebuah dus minuman berbentuk limas dengan alas berbentuk persegi. Panjang sisi alas 9 cm dan tingginya 6,5 cm. Berapa *ml*-kah volume dus minuman tersebut?
6. Alas sebuah prisma berbentuk segitiga siku-siku dengan panjang sisi-sisinya 9 cm, 12 cm, dan 15 cm. Tinggi prisma tersebut 18 cm. Jika sisi-sisinya diperbesar $1\frac{1}{4}$ kali, hitunglah besar perubahan volume prisma tersebut!

Otak-Atik Matematika

Sebuah tenda para pengungsi dibuat berbentuk prisma dengan bidang sejajarnya berbentuk seperti gambar di samping. Panjang tenda 7 m. Jika tenda tersebut diberi alas dan biaya pembuatan tenda untuk setiap 1 m^2 adalah Rp 22.500,00, hitunglah biaya pembuatan untuk 10 tenda!

1,25 m
2 m
7 m

Rangkuman

1. Prisma adalah bangun ruang yang memiliki sepasang bidang sejajar yang kongruen, serta bidang-bidang lainnya diperoleh dengan menghubungkan titik-titik sudut dari dua bidang yang sejajar.
2. Limas adalah bangun ruang yang memiliki satu alas dan bidang-bidang lainnya berbentuk segitiga yang bertemu pada satu titik puncak.
3. Menggambar prisma dan limas akan lebih mudah jika menggunakan kertas berpetak.
4. Jaring-jaring prisma dan limas merupakan rangkaian dari bangun datar yang apabila dilipat menurut garis persekutuan dua bidangnya akan membentuk prisma dan limas tersebut.

5. Luas permukaan prisma = (2 × luas alas) + (keliling alas × tinggi prisma).
6. Luas permukaan limas = luas alas + jumlah luas semua segitiga tegak.
7. Volume prisma = luas alas × tinggi prisma.
8. Volume limas = $\frac{1}{3}$ × luas alas × tinggi limas.

Uji Kemampuan

A. Pilihlah satu jawaban yang paling tepat, a, b, c, atau d! Tuliskan pada lembar jawabanmu!

1. Sebuah prisma mempunyai alas berbentuk segi lima beraturan. Banyak bidang diagonal yang dapat dibentuk adalah ….
   a. 4 c. 6
   b. 5 d. 7
2. Kerangka model limas dengan alas berbentuk persegi panjang mempunyai panjang 16 cm, lebar 12 cm, dan panjang rusuk tegaknya 24 cm. Panjang kawat yang diperlukan untuk membuat kerangka model limas tersebut adalah ….
   a. 152 cm c. 164 cm
   b. 146 cm d. 138 cm
3. Alas sebuah limas beraturan berbentuk persegi dengan panjang sisi 26 cm dan tinggi segitiga bidang tegaknya 30 cm. Luas permukaan limas tersebut adalah ….
   a. 2.236 cm^2 c. 2.326 cm^2
   b. 2.263 cm^2 d. 2.362 cm^2
4. Alas sebuah limas berbentuk persegi dengan panjang 20 cm dan panjang rusuk tegaknya masing-masing 26 cm. Luas permukaan limas tersebut adalah ….
   a. 2.480 cm^2 c. 1.440 cm^2
   b. 1.360 cm^2 d. 2.320 cm^2
5. Sebuah limas alasnya berbentuk persegi panjang dengan ukuran 48 cm × 21 cm dan tingginya 18 cm. Volume limas tersebut adalah ….
   a. 5.758 cm^3 c. 7.138 cm^3
   b. 6.048 cm^3 d. 8.048 cm^3
6. Sebuah prisma alasnya berbentuk belah ketupat dengan panjang diagonal 16 cm dan 12 cm. Luas permukaan prisma tersebut jika tingginya 12 cm adalah ….
   a. 216 cm^2 c. 672 cm^2
   b. 264 cm^2 d. 726 cm^2
7. Sebuah limas yang alasnya berbentuk persegi mempunyai luas alas 144 cm^2. Jika tinggi limas 8 cm, hitunglah luas permukaan limas tersebut ….
   a. 476 cm^2 c. 384 cm^2
   b. 294cm^2 d. 508 cm^2
8. Alas limas berbentuk persegi dengan panjang alas 10 cm, tinggi segitiga bidang tegaknya 13 cm, maka tinggi limas tersebut adalah ….
   a. 12 cm c. 10 cm
   b. 15 cm d. 6 cm

9. Volume sebuah limas yang alasnya berbentuk persegi 400 cm^3. Jika panjang sisi persegi 10 cm, maka tinggi segitiga bidang tegaknya adalah ….
   a. 12 cm
   b. 4 cm
   c. 13 cm
   d. 40 cm
10. Sebuah prisma dengan alas berbentuk trapesium siku-siku mempunyai panjang sisi-sisi sejajarnya 8 cm dan 14 cm, sisi miring 17 cm dan tingginya 10 cm. Jika tinggi prisma tersebut 12 cm, maka luas permukaan prisma tersebut adalah ….
   a. 808 cm^2
   b. 908 cm^2
   c. 878 cm^2
   d. 978 cm^2
11. Sebuah limas dengan alas berbentuk persegi dengan panjang sisi 40 cm. Jika tinggi pada bidang tegak segitiga 25 cm, maka volume limas tersebut adalah ….
   a. 10.000 cm^3
   b. 8.000 cm^3
   c. 24.000 cm^3
   d. 9.000 cm^3
12. Sebuah kolam renang mempunyai panjang 40 m dan lebar 15 m. Kolam tersebut mempunyai dua kedalaman. Kedalaman yang paling dangkal 1 m dan yang paling dalam 3 m. Maka volume air yang dapat ditampung oleh kolam renang tersebut adalah ….
   a. 3.600 cm^3
   b. 1.200 cm^3
   c. 2.400 cm^3
   d. 800 cm^3
13. Alas sebuah prisma berbentuk segitiga sama kaki dengan panjang sisi alas 10 cm dan panjang sisi kakinya 13 cm. Maka volume prisma tersebut jika tingginya 15 cm adalah ….
   a. 720 cm^3
   b. 800 cm^3
   c. 750 cm^3
   d. 900 cm^3
14. Volume sebuah limas 520 cm^3. Jika alasnya berbentuk jajargenjang dengan panjang alas 12 cm dan tingginya 10 cm, maka tinggi limas tersebut adalah ….
   a. 15 cm
   b. 11 cm
   c. 13 cm
   d. 16 cm
15. Sebuah prisma alasnya berbentuk persegi dengan panjang sisinya 4 cm dan tinggi 10 cm. Berapakah perbandingan volume prisma jika panjang sisi alasnya diperbesar 3 kali dari ukuran semula ….
   a. 1 : 18
   b. 1 : 9
   c. 1 : 7
   d. 1 : 5

B. Selesaikan soal-soal berikut ini!

1. Gambarlah sebuah prisma segienam pada kertas berpetak dengan ukuran sisi-sisi alasnya 2 petak satuan dan tinggi limas 6 petak satuan.
   a. Buatlah jaring-jaring prisma dari prisma yang telah kamu buat!
   b. Lukislah salah satu bidang diagonal prisma tersebut!

2. Diketahui sebuah limas alasnya berbentuk belah ketupat dengan panjang diagonal 36 cm dan 48 cm. Tinggi limas 25 cm. Hitunglah:
   a. luas alas
   b. keliling alas
   c. luas permukaan
   d. volume
3. Volume sebuah limas yang alasnya berbentuk persegi adalah 3.456 cm^3. Jika tinggi limas 32 cm, hitunglah panjang rusuk alas dan luas permukaan limas tersebut!
4. Sebuah prisma alasnya berbentuk segienam beraturan. Tinggi prisma 50 cm dan jumlah luas bidang tegaknya 6000 cm^2. Hitunglah panjang rusuk alas dan volume prisma tersebut!
5. Sebuah menara berbentuk gabungan prisma dan limas dengan alas berbentuk persegi panjang. Ukuran sisinya, panjang 4 m, lebar 3 m, dan tinggi prisma 5 m. tinggi keseluruhan menara itu adalah 11 m. Sketsalah menara tersebut dan hitunglah volume menara tersebut!

KUNCI JAWABAN BAB 9

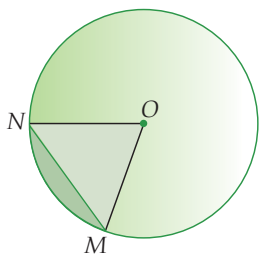
A. Pilihan Ganda

1. b
3. a
5. b
7. c
9. c
11. b
13. d
15. b

B. **Uraian**

3. Rusuk = 18 cm
   Luas permukaan = 1.521 cm^2
5. Volume = 84 cm^3

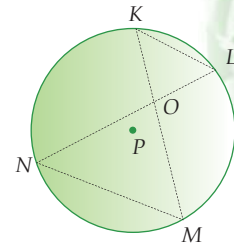
ULANGAN SEMESTER 2

A. Pilihlah satu jawaban yang paling tepat, a, b, c, atau d! Tuliskan pada lembar jawabanmu!

1. Jika $\pi = 3{,}14$, maka luas lingkaran yang kelilingnya 50,24 cm adalah ....
   a. 326,79 cm^2 c. 546,29 cm^2
   b. 200,96 cm^2 d. 365,39 cm^2

2. Panjang sisi-sisi segitiga siku-siku adalah 5 cm, 12 cm, dan 13 cm. Keliling lingkaran dalam segitiga tersebut adalah ....
   a. 12,56 cm c. 17,46 cm
   b. 15,26 cm d. 13,56 cm

3. Sebuah taman berbentuk lingkaran dengan diameter 100 m. Sekeliling taman tersebut akan ditanami oleh pohon mangga setiap 50 cm-nya. Banyak pohon untuk mengelilingi taman tersebut adalah ....
   a. 328 buah c. 526 buah
   b. 628 buah d. 468 buah

4. Besar $\angle MNL = 56^o$ dan $\angle NKL = 28^o$
   Besar $\angle NOM$ adalah ....
   a. 116^o c. 96^o
   b. 76^o d. 102^o

5.

   Besar $\angle MON = 90^o$. Panjang jari-jari $OM = ON = 14$ cm. Luas daerah yang di arsir (tembereng) adalah ….
   a. 56 cm^2 c. 59 cm^2
   b. 62 cm^2 d. 71 cm^2

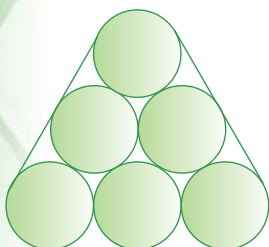
6. Dua lingkaran dengan panjang jari-jari masing-masing 8 cm dan 2 cm. Jarak kedua pusat lingkaran 10 cm. Banyaknya garis singgung persekutuan dalam dan persekutuan luar kedua lingkaran tersebut berturut-turut adalah ....
   a. 1 dan 2 c. 0 dan 2
   b. 2 dan 1 d. 2 dan 0

7. Panjang garis singgung melalui sebuah titik di luar lingkaran adalah 30 cm. Jika jari-jari lingkaran 16 cm, maka jarak antara titik pusat dengan pusat lingkaran adalah ....
   a. 22 cm c. 32 cm
   b. 24 cm d. 34 cm

8. Jarak titik pusat lingkaran dengan sebuah titik yang berada di luar lingkaran adalah 78 cm. Panjang garis singgung yang melalui titik tersebut 72 cm. jari-jari lingkaran itu adalah ….

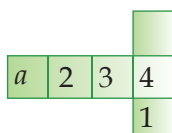
a. 40 cm
b. 35 cm
c. 30 cm
d. 25 cm

9. Jarak kedua pusat lingkaran adalah 39 cm, sedangkan panjang garis singgung persekutuan dalamnya 36 cm. Panjang jari-jari salah satu lingkaran adalah 8 cm. Panjang jari-jari yang lainnya adalah ….
   a. 5 cm
   b. 6 cm
   c. 7 cm
   d. 4 cm

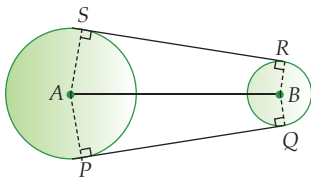
10.

    Lima buah paralon masing-masing berdiameter 14 cm diikat dengan seutas tambang seperti gambar di samping. Panjang tambang minimal yang digunakan untuk mengikat kelima paralon tersebut adalah ....
    a. 86 cm
    b. 128 cm
    c. 208 cm
    d. 230 cm

11. Banyaknya bidang diagonal kubus adalah ....
    a. 6
    b. 8
    c. 10
    d. 12

12. Perbandingan panjang, lebar dan tinggi sebuah balok adalah 10 : 3 : 5. Bila jumlah panjang rusuk balok 1.440 cm, maka tinggi balok adalah ....
    a. 60 cm
    b. 80 cm
    c. 200 cm
    d. 100 cm

13.

    Berdasarkan gambar di samping, jika daerah *a* merupakan bidang alas dari sebuah kubus, maka bidang yang menjadi tutup adalah ....
    a. 1
    c. 2
    c. 3
    d. 4

14. Sebuah kubus mempunyai panjang rusuk 9 cm. Jika panjang rusuknya diperpanjang menjadi 18 cm, maka volume kubus yang panjang rusuknya telah diperpanjang adalah ....
    a. 6.328 cm^2
    b. 5.832 cm^2
    c. 4672 cm^2
    d. 3064 cm^2

15. Sebuah balok berukuran panjang 19 cm, lebar 12 cm, dan tinggi 7 cm. Luas permukaan balok adalah ....
    a. 990 cm^2
    b. 790 cm^2
    c. 890 cm^2
    d. 690 cm^2

16. Sebuah prisma mempunyai alas berbentuk segi lima beraturan. Banyak bidang diagonal yang dapat dibentuk adalah ....
    a. 5
    b. 4
    c. 7
    d. 6

17. Sebuah limas alasnya berbentuk persegi panjang dengan ukuran 48 cm × 21 cm dan tinggi 15 cm. Volume limas tersebut adalah ....

a. 5.040 cm^3	c. 6.208 cm^3
b. 4.050 cm^3	d. 8.062 cm^3

18. Kerangka model limas alasnya berbentuk persegi dengan panjang sisi-sisinya 16 cm, dan panjang rusuk tegaknya 25 cm. Panjang kawat yang diperlukan untuk membuat kerangka model limas tersebut adalah ....

a. 1.620 cm	c. 162 dm
b. 1,62 m	d. 16,2 dam

19. Sebuah prisma alasnya berbentuk layang-layang dengan panjang diagonal 19 cm dan 12 cm. Volume prisma jika tinggi prisma 11 cm adalah ....

a. 2.508 cm^3	c. 2.058 cm^3
b. 1.524 cm^3	d. 1.254 cm^3

20. Sebuah kolam renang mempunyai panjang 40 m dan lebar 15 m. Kolam tersebut mempunyai dua kedalaman. Kedalaman yang paling dangkal 1 m dan yang paling dalam 3 m. Maka volume air yang dapat ditampung oleh kolam renang tersebut adalah ....

a. 3.600 m^3	c. 1.200 m^3
b. 2.400 m^3	d. 800 m^3

B. Selesaikan soal-soal berikut ini!

1. Sebuah taman berbentuk lingkaran berjari-jari 40 m. Di sekeliling tepinya dibuat jalan melingkar mengelilingi taman yang lebarnya 2 m. Jika biaya untuk membuat jalan tiap 1 m^2 adalah Rp 25.000,00, hitunglah biaya seluruh pembuatan jalan tersebut!

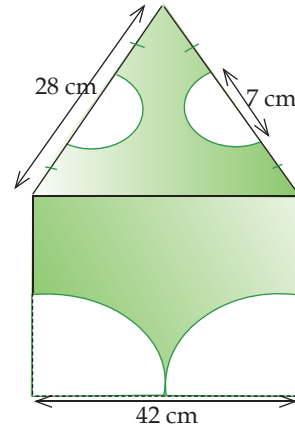
2. Dua lingkaran berpusat di A dan B dengan AS = 14 cm, BR = 5 cm. Panjang garis singgung persekutuan luarnya SR = PQ = 40 cm. Hitunglah luas daerah $PQRS$!

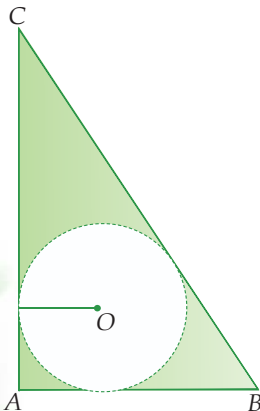
3. Sebuah menara berbentuk gabungan antara prisma dengan limas. Alas dari menara tersebut adalah persegi panjang. Ukuran dari menara tersebut adalah panjang 4 m, lebar 3 m, dan tinggi prisma 5 m.
   Buatlah sketsa dari menara tersebut, kemudian hitung volume menara apabila diketahui tinggi keseluruhan menara adalah 11 m!

4. Sebuah kolam ikan yang berbentuk balok mempunyai ukuran panjang 6 m, lebar 5 m, dan tinggi 2 m.
   a. Berapa liter air yang dapat ditampung oleh kolam ikan tersebut!

b. Air dari kolam ikan tersebut akan dipindahkan ke dalam kolam ikan lainnya. Berapa lebar kolam ikan yang baru jika ukuran panjang dan tinggi kolam ikan yang baru berturut-turut 8 m dan 2,5 m!

5. Volume sebuah balok adalah 4.096 cm^3. Jika perbandingan antara panjang, lebar, dan tinggi balok adalah 4 : 2 : 1, hitunglah ukuran masing-masing sisi balok tersebut!

6. Perhatikan gambar di samping!
   Berdasarkan gambar di samping, hitunglah:
   a. Keliling daerah yang diarsir
   b. Luas daerah yang diarsir

7. Dua buah lingkaran mempunyai perbandingan jari-jari sebesar 2 : 3. Jika kedua jari-jari lingkaran tersebut diperpanjang menjadi 2 kali lipatnya, tentukan:
   a. Tentukan jari-jari kedua lingkaran jika jumlah kedua jari-jari adalah 70 cm
   b. Volume sebelum dan sesudah perubahan jari-jari

8. Perhatikan gambar berikut ini!

Jika diketahui panjang BC = 26 cm, dan perbandingan antara panjang AB dengan panjang AC adalah 5 : 13. Tentukan:
   a. Luas lingkaran jika diameternya = AB - 3
   b. Luas ΔABC
   c. Luas daerah yang diarsir

9. a. Alas sebuah limas berbentuk persegi dengan panjang sisi 14 cm. Tinggi segitiga pada sisi tegaknya 25 cm. Tentukan volume limas tersebut!
   b. Alas sebuah prisma berbentuk segitiga siku-siku dengan panjang sisi-sisinya 15, 20, dan 25. Jika tinggi prisma 18 cm, tentukan volume prisma tersebut!
   c. Tentukan luas permukaan limas!
   d. Tentukan luas permukaan prisma tersebut!

10. a. Tentukan ukuran rusuk yang mungkin dari suatu balok jika diketahui volume dan luas permukaannya berturut-turut 672 l dan 472 dm^2!

b. Hitung volume awal kubus jika perbandingan rusuk kubus awal dan akhir sebesar 3 : 5, dan besar volume akhir 3.375 cm^3!

c. Sebuah kubus yang sisinya berukuran 10 cm akan disimpan ke dalam sebuah kardus yang berbentuk balok dengan ukuran 150 cm × 120 cm × 90 cm. Tentukan jumlah kubus yang dapat ditampung oleh kardus tersebut!

KUNCI JAWABAN SEMESTER 2

A. Pilihan Ganda

1. b
3. b
5. a
7. d
9. c
11. a
13. c
15. c
17. a
19. d

B. Uraian

1. Rp 13.000.000,00
3. 84 m^3
5. 32 cm, 16 cm, 8 cm.
7. a. r_1 = 28 cm

   r_2 = 42 cm
9. a. 1.568 cm^3

   c. 956 cm^2

DAFTAR PUSTAKA

Badan Standar Nasional Pendidikan. 2006. *Standar Konmpetensi dan Kompetensi Dasar Mata Pelajaran Matematika untuk Sekolah Menengah Pertama dan Mddrasah Tsanawiyah*. Jakarta: Balibang Puskur.

Bana G, dkk. 1988. *Kamus Matematika.* Jakarta: Depdiknas.

Budett, Silver. 2003. *Mathematics.* USA. General Learning Corporation.

Elvin R., et all. 1993. *Basic Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

Howard, Anton. 1981. *Elementary Linear Algebra*. New York: John Willey & Sons.

Hong, Tay Choon, et all. 1999. *Mathematics Count 3*. Singapore: Federal Publications.

Jordan, Mayer. et all. 2000. *Basic Concepts of Geometry, 2nd ed.* London: Blaisdell Publishing Company.

Koesmartono, Rawuh. 1999. *Matematika Pendahuluan*. Bandung: ITB.

Posamentier and Stelpeman. 2002. *Techening Secondary School Mathematics*. Toronto: Prentice Hall Science.

Prayitno, Budhi, dkk. 2003. *Matematika untuk SMU*. Jakarta; Erlangga.

Russefendi. 1998. *Dasar-Dasar Matematika Modern untuk Guru-Guru dan Orang Tua Murid*. Bandung: Tarsito.

Seymour, Lipschutzt. 1995. *Set Theory,* diterjemahkan oleh Pantur Silaban. Jakarta: Erlangga.

Sobel, Max A., et all. 2004. *To Learn Mathematics*. 3rd ed. Oxford: Oxford University Press.

Sudjana. 1996. *Metode Statistika*. Bandung: Tarsito.

Su Hurell. 2002. *Maths Made Easy*. London: Dorling Kindersley.

Supranto, J. 2002. *Statistika, Teori dan Aplikasi, Edisi ke-4.* Jakarta: Erlangga.

Wahyudin. 2003. *Ensiklopedi Matematika Untuk SLTP*. Jakarta: Tarity Samudra Berlian.

GLOSARIUM

Absis, koordinat mendatar dalam bidang Kartesius (sumbu x).

Apotema, jarak terpendek tali busur terhadap titik pusat lingkaran.

Aritmetika, cabang ilmu matematika yang berhubungan dengan kegiatan ekonomi, bisnis, dan sosial.

Bidang, daerah yang membatasi bagian luar dan bagian dalam suatu bangun ruang.

Bidang diagonal, daerah yang dibatasi oleh dua buah diagonal bidang dan dua buah rusuk yang saling berhadapan, dan membagi bangun ruang menjadi dua bagian.

Binom, bentuk aljabar yang mempunyai suku dua.

Dalil Pythagoras, kuadrat sisi miring pada segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat sisi siku-sikunya.

Diagonal bidang, garis yang menghubungkan dua buah titik sudut yang saling berhadapan dalam satu bidang.

Diagonal ruang, garis yang menghubungkan dua buah titik sudut yang saling berhadapan tak sebidang.

Diagram panah, Suatu relasi yang ditunjukkan dengan anak panah.

Diameter, garis tengah lingkaran atau garis yang menghubungkan dua titik yang berada tepat pada lingkaran dan melalui titik pusat lingkaran.

Domain, daerah asal.

Fungsi, relasi khusus yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.

Garis bagi, garis yang membagi sudut menjadi dua bagian yang sama besar.

Garis pusat, garis yang menghubungkan dua buah titik pusat lingkaran.

Garis singgung lingkaran, garis yang memotong lingkaran tepat di satu titik.

Garis singgung persekutuan, garis yang menyinggung dua buah lingkaran secara bersamaan.

Gradien, ukuran kemiringan atau koefisien arah pada suatu garis lurus.

Hypothenusa, sisi terpanjang pada segitiga siku-siku yang terletak dihadapan sudut siku-sikunya.

Juring, daerah yang dibatasi oleh busur dan dua buah jari-jari lingkaran.

Korespondensi satu-satu, anggota himpunan A berpasangan dengan tepat satu anggota B, dan begitu pula sebaliknya.

Kuadrat, bilangan yang diperoleh dengan mengalikan bilangan tersebut dengan dirinya sendiri.

Kodomain, daerah kawan.

Limas, bangun ruang yang memiliki satu bidang banyak sebagai alas dan bidang-bidang lainnya berbentuk segitiga yang bertemu pada satu titik puncak.

Lingkaran, kumpulan titik-titik yang mempunyai jarak sama terhadap sebuah titik tertentu (pusat lingkaran).

Metode eliminasi, menghilangkan salah satu variabel persamaan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan dua sistem persamaan.

Ordinat, koordinat tegak dalam bidang Kartesius (sumbu y).

Pecahan, bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, b bukan faktor dari a.

Persamaan linear dua variabel, persamaan yang penyelesaiannya terdiri dari dua peubah dan dapat dituliskan dalam bentuk $ax + by = c$.

Polinom, bentuk aljabar yang mempunyai banyak suku.

Prisma, bangun ruang yang memiliki sepasang bidang sejajar dan kongruen (alas dan tutup) serta bidang-bidang lain yang diperoleh dengan menghubungkan titik-titik sudut dari dua bidang yang sejajar.

Range, daerah hasil.

Relasi, hubungan yang memasangkan anggota himpunan A dan B.

Rusuk, perpotongan dua buah bidang yang berupa garis.

Segitiga, bangun datar yang mempunyai tiga sisi dan tiga sudut.

Segitiga siku-siku, segitiga yang salah satu sudutnya membentuk sudut 90^o.

Sudut keliling, sudut yang titik sudutnya tepat berada di lingkaran.

Sudut pusat, sudut yang titik sudutnya tepat berada di pusat lingkaran.

Suku banyak, bentuk aljabar yang mempunyai suku lebih dari suku dua atau mempunyai suku yang peubahnya berpangkat lebih dari dua.

Sumbu koordinat, dua garis yang saling tegak lurus dan berpotongan di titik (0,0).

Tembereng, daerah yang dibatasi oleh busur dan tali busur.

Titik sudut, perpotongan tiga buah rusuk.

Tripel Pythagoras, bilangan bulat positif yang kuadrat bilangan terbesarnya sama dengan jumlah kuadrat bilangan lainnya.

Volume, bilangan yang menyatakan ukuran suatu bangun ruang.

INDEKS

DAFTAR SIMBOL

$\div$	: Pembagian
-	: Pengurangan
+	: Penjumlahan
$\times$	: Perkalian
=	: Sama dengan
$\neq$	: tidak sama dengan
$\in$	: Anggota himpunan
!	: Faktorial
$\leq$	: Lebih kecil atau sama dengan
$\geq$	: Lebih besar atau sama dengan
c	: Konstanta
m	: Gradien
//	: Sejajar
$\perp$	: Tegak lurus
$\sqrt{}$	: Akar kuadrat
∟	: Siku-siku
°	: Derajat
$\angle$	: Sudut
r	: Jari-jari
π	: Phi
$f \rightarrow A : B$	: Fungsi dari himpunan A ke himpunan B
{ }	: Kurung kurawal
Δ	: Segitiga

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia Nomor: 81 Tahun 2008 Tanggal 11 Desember 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

MATEMATIKA

SMP DAN MTS

Matematika bukanlah bidang ilmu yang perlu ditakuti. Justru sebaliknya, matematika merupakan ilmu yang perlu dikuasai dengan baik. Disadari atau tidak, hampir semua sendi kehidupan melibatkan matematika. Sejak kamu bangun, kamu memperkirakan waktu agar tidak kesiangan di sekolah. Kamu telah mempraktikkan matematika. Ibumu tiap hari menghitung pengeluaran rumah tangga, itu juga merupakan aplikasi matematika. Atau, para ahli memperkirakan kecepatan pertumbuhan bakteri, kecepatan pesawat ruang angkasa, serta besar sudut tiang penyangga jembatan, itu juga memerlukan matematika. Singkat kata, semua aktivitas yang melibatkan bilangan dan operasi hitung, itulah matematika.

Banyak hal menarik yang dapat kamu temukan dengan belajar matematika. Selain mahir dalam operasi hitung biasa, banyak fenomena alam dapat diungkap melalui perhitungan matematika. Contohnya mengukur diameter planet-planet, menghitung kekuatan suatu material, jumlah debit air yang masuk bendungan, menggambar suatu konstruksi bangunan dengan benar, dan masih banyak perhitungan matematis lainnya.

Penguasaan matematika pada tingkat lanjut tidak lepas dari penguasaan matematika pada tingkat dasar. Oleh karena itu, belajar matematika pada tingkat dasar dengan penguasaan yang baik merupakan suatu hal yang mutlak. *Ayo tingkatkan kecerdasan berhitungmu dengan mencintai matematika.*

ISBN 978-979-068-665-6

Harga Eceran Tertinggi (HET) Rp 12.249,-